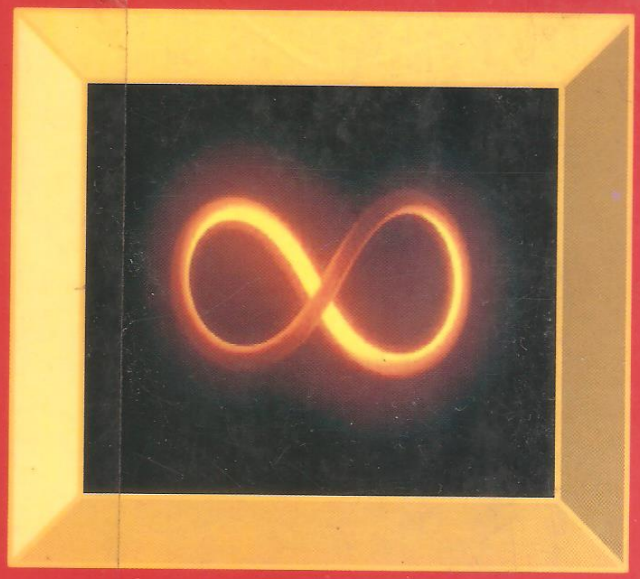
Jorge Sáenz

Fanny Gil Belkis López
Neptalí Romero José Bethelmy

FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA

TERCERA EDICIÓN



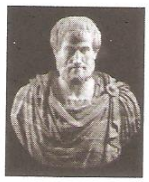
HIPOTENUSA

e Ciencias
oteca
Gamero"
CIÓN

CONTENIDO

PROLOGO vii

Capítulo 1. CALCULO PROPOSICIONAL 1



ARISTOTELES (384–322 a. J. C.) 2

1.1 Proposiciones 3

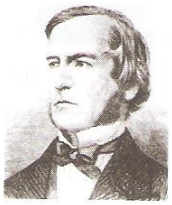
1.2 Operaciones Veritativas 5

1.3 Formas Proposicionales 21

1.4 Equivalencia Lógica y Algebra de Proposiciones 30

Desarrollo Decimal de π 43

Capítulo 2. INFERENCIA LOGICA 45



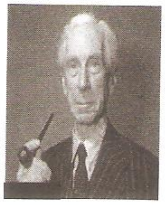
GEORGE BOOLE (1.815–11.860) 46

2.1 Implicación e Inferencia 47

2.2 Métodos de Demostración 64

Descubrimiento de los Irracionales. Una historia trágica 73

Capítulo 3. CUANTIFICADORES 75



BERTRAND RUSSELL (1.872–1.970) 76

3.1 Funciones Proposicionales 77

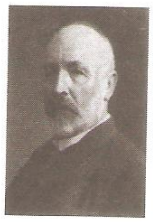
3.2 Cuanficadores Universal y Existencial 79

3.3 El Método Axiomático 95

Breve Historia de la Lógica 98

lusiva de Inversora
n autorización del

Capítulo 4. CONJUNTOS 101



GEORGE CANTOR (1.845–1.970) 102

4.1 Conjuntos y Subconjuntos 103

4.2 Unión e Intersección de Conjuntos 113

4.3 Diferencia, Complemento y Diferencia Simétrica 117

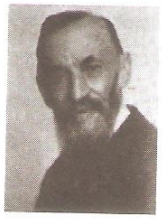
4.4 Producto Cartesiano 129

4.5 Operaciones Generalizadas 136

4.6 Representación Computacional de Conjuntos 146

Breve Historia de la Teoría de Conjuntos 150

Capítulo 5. NUMEROS NATURALES Y NUMEROS CARDINALES 153



GIUSEPPE PEANO (1.858–1.932) 154

5.1 Números Naturales y Principio de Inducción Matemática 155

5.2 Números Cardinales 164

5.3 Principio de Inclusión–Exclusión 168

5.4 Principios Básicos de Conteo 175

5.5 Permutaciones y Combinaciones 183

Breve Historia de los sistemas Numéricos 194

Capítulo 6. RELACIONES 197

CHARLES SANDERS PIERCE (1.839–1.914) 198

6.1 Introducción 199

6.2 Relaciones Binarias 200

6.3 Relaciones en un Conjunto 209

6.4 Relaciones de Equivalencia 216

6.5 Relaciones de Orden 227

¿Sabías que no hay premio Nóbel en Matemáticas? 233

Capítulo 7. FUNCIONES 235

PITER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1.805–1.859) 236

7.1 Funciones 237

7.2 Función Inversa y Composición 246

7.3 Imágenes de Conjuntos 254

7.4 Sucesiones y Relaciones de Recurrencia 259

Capítulo 8. OPERACIONES 271

NEILS HENRIK ABEL (1.802–1.829) 272

EVARITE GALOIS (1.811–1.832) 272

7.1 Operaciones Binarias 273

7.2 Estructuras Algebraicas 283

RESPUESTAS **297**

INDICE ALFABETICO **311**

PROLOGO

Nos sentimos muy halagados por la gran recepción que ha tenido nuestro texto, **Fundamentos de la Matemática,** el cual se ha mantenido en las aulas durante mucho tiempo, desde que apareció la primera edición.

El texto está diseñado para estudiantes que se inician en las carreras de computación, matemática, educación matemática y otras.

En esta tercera edición presentamos una revisión de la última edición. Hemos mejorado su presentación, se han agregado algunos problemas resueltos y algunas historias interesantes. La esencia de la segunda edición se ha conservado.

Como en todos nuestros textos, se busca equilibrar la teoría y la práctica. La teoría es acompañada de numerosos ejemplos. Cada sección presenta un grupo de problemas resueltos, donde muchos problemas típicos de relevancia son desarrollados con todo detalle. La gran mayoría de teoremas son presentados con sus respectivas demostraciones. Cuando la demostración es compleja, ésta es presentada como un problema resuelto. A lo largo de la exposición de los distintos temas, hacemos resaltar la parte histórica.

Damos testimonio de nuestro agradecimiento a los numerosos profesores que nos han respaldado en la preparación de estas tres ediciones. En especial para esta tercera ha sido de invalorable ayuda los señalamientos recibidos de los profesores Edgar Guedez, Jesús Medina y Andy El Achouche El Maaz, quienes han leído minuciosamente el libro y han resuelto todos los problemas propuestos.

Los Autores

Barquisimeto, julio del 2.014

1

CALCULO PROPOSICIONAL

ARISTOTELES
(384–322 A. C.)

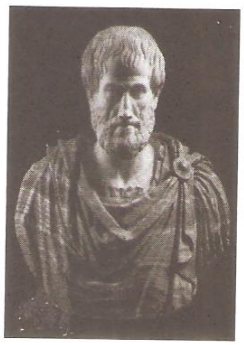
1.1 PROPOSICIONES

1.2 OPERACIONES VERITATIVAS

1.3 FORMAS PROPOSICIONALES

1.4 EQUIVALENCIA LOGICA Y ALGEBRA DE PROPOSICIONES

DESARROLLO DECIMAL DE π



ARISTOTELES
(384–322 A. C.)

ARISTOTELES, *junto con Sócrates y Platón, son considerados como los pensadores más destacados de la Antigua Grecia. Por su propio lado, Aristóteles es visto como el intelecto más influyente dentro de la filosofía occidental y como una de las mentes más vastas que ha producido la humanidad. El sentó las primeras bases firmes de muchas disciplinas actuales, como la biología, psicología, física, teoría literaria, ética, lógica, etc.*

Nació en Estagira (actualmente, Estavro), una pequeña ciudad de Macedonia, al norte de Grecia. Por esta razón, a Aristóteles lo llaman el Estagirista. Su padre, Nicomachus, fue médico de la corte del Amintas III, rey de Macedonia. Amintas III fue el padre del rey Filipo II, conquistador de la Grecia Antigua, y abuelo de Alejandro Magno, el gran conquistador del mundo antiguo.

Cuando cumplió los 17 años viajó a Atenas para estudiar en la ***Academia*** *de Platón. Aquí permaneció 20 años. En el año 345 A. C., se mudó a Pela, capital antigua de Macedonia, donde se convirtió en el tutor de Alejandro. En 336 A. C., regresa a Atenas y funda su propia escuela:* ***El Liceo****. Las clases son dadas, mayormente, a lo largo de un paseo techado (peripatos). Por este motivo, los seguidores de Aristóteles, reciben el nombre de Peripatéticos.*

Después de la muerte de Alejandro, en el año 323 A. C., en Atenas se desarrolla un resentimiento en contra los macedonios. Por tal razón, Aristóteles se traslada a Calcis, en la isla de Eubea, donde muere un año después, a la edad de 62 años.

ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

Durante la vida de Aristóteles (384 a 322 A. C.), en América sucedieron los siguientes hechos notables: En América Central, la civilización Maya vivía los últimos años de período preclásico (2.000 A. C. A 100 D. C.). En esa época comienza la construcción de sus pirámides. En el Perú, se desarrollaba la cultura Chavín de Huantar (2.000 A .C a 600 D. C.). Las culturas Inca y Azteca son muy posteriores. Ellas aparecen recién en los siglos XII y XIV de nuestra era, respectivamente.

SECCION 1.1
PROPOSICIONES

Los diferentes juicios que ocurren en nuestro lenguaje pueden ser clasificados en tres clases: Juicios interrogativos, juicios imperativos y juicios declarativos. Son los juicios declarativos los que nos sirven para la exposición y fundamentación del pensamiento científico.

Una **proposición** es un juicio declarativo del cual tiene sentido decir que es **verdadero (V)** o que es **falso (F)**, pero no ambas cosas simultáneamente. No es necesario saber de antemano que el juicio es verdadero o es falso, lo único que requerimos es que sea lo uno o lo otro, aunque no se conozca cual de los dos casos.

EJEMPLO 1 Los siguientes juicios declarativos son proposiciones:

a. El agua se compone de hidrógeno y oxígeno (V)

b. $2 + 5 = 8$ (F)

c. Todo estudiante es universitario (F)

d. Algunos estudiantes son universitarios (V)

e. El trillonésimo dígito de la expansión decimal de π es 5. (?)

El juicio declarativo (e) es una proposición debido a que éste es verdadero o es falso, aunque no tengamos la menor idea de cual de los dos casos es, ya que tal dígito nadie lo ha calculado todavía (ver Desarrollo decimal de π , final del capítulo).

EJEMPLO 2 Los siguientes juicios no son proposiciones:

a. ¡No fumar! **b.** ¿Cómo te llamas?

c. Esta proposición es falsa

Los dos primeros juicios no son declarativos: (a) es imperativo y (b) es interrogativo. Observar que para este tipo de juicio no tiene sentido preguntar si son verdaderos o falsos. El juicio (c) es contradictorio: Si suponemos que es verdadero, entonces resulta falso. Si suponemos que es falso, resulta verdadero. Como una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez, concluimos que (c) no es proposición.

Con el ánimo de simplificar y de aprovechar la ventaja que nos proporciona la aritmética, en lugar de usar las letras V y F para representar los conceptos de verdadero y falso respectivamente, usaremos los números 1 y 0. A toda proposición verdadera le asignamos el valor 1, y a toda proposición falsa le asignamos el valor 0. Aún más, llamaremos **valor lógico** de una proposición al valor 1 ó 0 que le corresponda, según la proposición sea verdadera o falsa.

Para representar proposiciones usaremos las letras p, q, r, s, t, etc. Usaremos la expresión VL para representar el valor lógico.

EJEMPLO 3 Si p y q son las siguientes proposiciones:

p : 5 es un número primo, $q : 4 < 2$, entonces

$$\text{VL}(p) = 1 \quad \text{y} \quad \text{VL}(q) = 0$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.1

1. Determinar cuales de las siguientes expresiones son proposiciones:

   a. Sucre peleó en la batalla de Ayacucho.

   b. El oxígeno es un gas.

   c. Todos los hombres son mortales

   d. Nadie es perfecto.

   e. Algunos números enteros son positivos.

   f. Caballo llanero, ¿porqué estas tan viejo y cansado?

   g. El número $2^{34832} + 1$ es un número primo.

   h. ¡Ten cuidado!.

   i. El que se crea libre de pecado, que lance la primera piedra.

   j. Algunas proposiciones son falsas.

   k. Se puede aprender a ser inteligente.

   l. ¡Sálvese el que pueda!

   m. Para todo número real x, $x^2 \geq x$

   n. Para todo número real x, $x < x^2$

   o. Existe un número natural n tal que $n^2 = n$

   p. Toda regla tiene su excepción.

   q. Toda proposición que tiene menos de 15 palabras es falsa.

2. **Problema recreativo.** Un explorador, prisionero por los caníbales va a ser sacrificado en el templo de la diosa **"Verdad"**. El prisionero tiene el privilegio de decidir entre ser asado o ser hervido. Para esto, el explorador debe decir una proposición. Si la proposición es verdadera, él será hervido y si es falsa, será asado. El explorador escoge como su proposición a la siguiente: "Yo seré asado". ¿Qué harán los caníbales ?

SECCION 1.2
OPERACIONES VERITATIVAS

En el lenguaje diario se tienen ciertos términos que nos permiten conectar proposiciones para producir otras más complejas. Así, con las proposiciones:

a. Marte es un planeta **b**. El sol es una estrella,

construimos estas otras:

1. Marte es un planeta **y** el sol es una estrella
2. Marte es un planeta **o** el sol es una estrella
3. **O** Marte es un planeta **o** el sol es una estrella
4. **Si** Marte es un planeta **entonces** el sol es una estrella
5. Marte es un planeta **si y sólo si** el sol es una estrella
6. Marte **no** es un planeta.

A los términos conectivos:

y; o; o ... o; sí, ... entonces; sí y sólo si; no;

provistos del significado preciso que les daremos más adelante, se les llama **conectivos lógicos elementales**.

A las proposiciones que no contienen conectivos lógicos las llamaremos **proposiciones simples** o **atómicas**. Las proposiciones que se obtienen combinando otras, mediante los conectivos, las llamaremos **proposiciones compuestas**. Así, las proposiciones a y b anteriores, son simples. En cambio, las proposiciones enumeradas de 1 al 6, son compuestas.

Los conectivos lógicos elementales nos permitirán definir operaciones con proposiciones. Estas operaciones, como veremos oportunamente, tienen la característica de que el valor lógico de la proposición resultante sólo depende de los valores lógicos de las proposiciones componentes. En general, a toda operación con proposiciones que tenga esta propiedad, se le llama **operación veritativa**. Ahora bien, el **cálculo proposicional** es el estudio de las operaciones veritativas.

Nos concretaremos, ahora, a presentar cada uno de los conectivos lógicos elementales y las operaciones veritativas a que dan lugar. Comenzaremos introduciendo un nombre y un símbolo para cada uno.

NOMBRE	SIMBOLO	TRADUCCION
Negación	$\sim$	**no, no es el caso que**
Conjunción	$\wedge$	**y**
Disyunción (inclusiva)	$\vee$	**o**
Disyunción Exclusiva	$\veebar$	**o ... o**
Condicional	$\rightarrow$	**si ..., entonces**
Bicondicional	$\leftrightarrow$	**si y sólo si**

LA NEGACION

DEFINICION Sea p una proposición. La **negación de** p es la proposición $\sim p$ que se lee "**no** p", "**no es el caso que** p" y cuyo valor lógico está dado por la siguiente tabla de verdad.

p	$\sim p$
1	0
0	1

Esta tabla dice, en forma sintética, que $\sim p$ es falsa cuando p es verdadera y que $\sim p$ es verdadera cuando p es falsa. Este mismo resultado lo podemos expresar en forma analítica mediante la siguiente igualdad:

$$\mathbf{VL(\sim p) = 1 - VL(p)}$$

En efecto:

Si $VL(p) = 1$, entonces $VL(\sim p) = 1 - VL(p) = 1 - 1 = 0$ y si $V(p) = 0$, entonces $VL(\sim p) = 1 - VL(p) = 1 - 0 = 1$.

EJEMPLO 1 La negación de la proposición:

p : Mérida es un estado andino

es la proposición:

$\sim p$: Mérida no es un estado andino.

Como p es verdadero, $\sim p$ es falsa.

Un resultado importante que se obtiene de la igualdad: $VL(\sim p) = 1 - VL(p)$, es que el valor lógico de $\sim p$ depende únicamente del valor lógico de p. Este hecho nos dice que la negación de proposiciones es una operación veritativa.

TRADUCCION
, no es el caso que
y
o
o ... o
si ..., entonces
si y sólo si

le p es la proposición $\sim p$
" y cuyo valor lógico está

ndo p es verdadera y que
o lo podemos expresar en

y si $V(p) = 0$, entonces

$VL(\sim p) = 1 - VL(p)$, es
ico de p. Este hecho nos
tativa.

LA CONJUNCION

DEFINICION Sean p y q dos proposiciones. **La conjunción de p y q** es la proposición $p \wedge q$, que se lee "p y q", y cuyo valor lógico está dado por la siguiente tabla:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

También se puede definir la **conjunción** mediante la siguiente igualdad:

$$VL(p \wedge q) = \min \{ VL(p),\ VL(q) \}$$

La tabla de verdad o la igualdad anteriores nos dice que $p \wedge q$ es verdadero en el caso de que p y q sean ambos verdaderos, y que es falso en los otros tres casos. Es decir, $p \wedge q$ es verdadera solamente cuando ambas, p y q, son verdaderas.

Llamaremos **conjunción** a la operación que a cada par (p, q) de proposiciones le asigna la proposición $p \wedge q$. La conjunción es una operación **binaria**, ya que el resultado $p \wedge q$, se obtiene a partir de operar **dos** proposiciones, p y q. La conjunción también es una operación veritativa, ya que el valor lógico de $p \wedge q$, como indica la tabla anterior, sólo depende de los valores lógicos de p y de q.

EJEMPLO 2 Si p : Páez peleó en Carabobo

q : Bolívar murió en Colombia.

r : Sucre nació en Caracas

entonces,

a. $p \wedge q$: Páez peleó en Carabobo y Bolívar murió en Colombia.

Además, $VL(p \wedge q) = 1$, ya que $VL(p) = 1$ y $VL(q) = 1$.

b. $q \wedge r$: Bolívar murió en Colombia y Sucre nació en Caracas.

Además, $VL(q \wedge r) = 0$, ya que $VL(q) = 1$ y $VL(p) = 0$

LA DISYUNCION

DEFINICION Sean p y q dos proposiciones. La **disyunción** de p y q es la proposición $p \vee q$, que se lee "p o q", y cuyo valor lógico está dado por la siguiente tabla:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

También se puede definir la disyunción mediante la siguiente igualdad:

$$\mathrm{VL}(p \vee q) = \max\{\mathrm{VL}(p),\ \mathrm{VL}(q)\}$$

La tabla de verdad o la igualdad anteriores, nos dice que $p \vee q$ es verdadera si p es verdadera, q es verdadera o ambas son verdaderas; y $p \vee q$ es falsa si ambas, p y q, son falsas. Es decir, $p \vee q$ es falsa solamente cuando ambas, p y q, son falsas.

Llamaremos **disyunción** a la operación que a cada par de proposiciones (p, q), le asigna la proposición $p \vee q$. La disyunción, al igual que la conjunción, es una operación veritativa binaria.

EJEMPLO 3 Si, p : Madrid está en España, q : Miami está en Canadá

r : Roma está en Francia

entonces

a. $p \vee q$: Madrid está en España o Miami en Canadá.

$\mathrm{VL}(p \vee q) = 1$, ya que $\mathrm{VL}(p) = 1$ y $\mathrm{VL}(q) = 0$

b. $q \vee r$: Miami está en Canadá o Roma está en Francia.

$\mathrm{VL}(q \vee r) = 0$, ya que $\mathrm{VL}(q) = 0$ y $\mathrm{VL}(r) = 0$

LA DISYUNCION EXCLUSIVA

DEFINICION Sean p y q dos proposiciones. La **disyunción exclusiva de** p y q es la proposición $p \veebar q$, que se lee "o p o q", y cuyo valor lógico está dado por la siguiente tabla:

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

También se puede definir la **disjunción exclusiva** mediante la siguiente igualdad:

$$\mathrm{VL}(p \veebar q) = |\mathrm{VL}(p) - \mathrm{VL}(q)|$$

Comparando la tabla de verdad de la disyunción con la tabla de la disyunción exclusiva se ve que estas sólo se diferencian en la primera fila. La disyunción exclusiva $p \veebar q$ es falsa si ambas, p y q son verdaderas. A la disyunción para diferenciarla con nitidez de la disyunción exclusiva, también se la llama **disyunción inclusiva**.

Más adelante veremos que $p \veebar q$ es "equivalente" a la proposición:

$$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

EJEMPLO 4 Si, p : 7 es un número primo, q : 7 es un número par.

r : 7 es mayor que 2.

entonces,

a. $p \veebar q$: O 7 es un número primo ó 7 es un número par.

$VL(p \veebar q) = 1$, ya que $VL(p) = 1$ y $VL(q) = 0$

b. $p \veebar r$: O 7 es un número primo ó 7 es mayor que 2.

$VL(p \veebar r) = 0$, ya que $VL(p) = 1$ y $VL(r) = 1$

EL CONDICIONAL

DEFINICION Sean p y q dos proposiciones. El **condicional** con **antecedente** p y **consecuente** q es la proposición $p \rightarrow q$, que se lee **"si p, entonces q"**, y cuyo valor lógico está dado por la siguiente tabla:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

La tabla nos dice que el condicional es falso sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso. En cualquiera de los otros tres casos, el condicional es verdadero.

Hacemos hincapié en la tercera y cuarta fila de la tabla. Estas dicen que si el antecedente es falso, el condicional es verdadero, no importando el valor lógico del consecuente. Este resultado incomoda a mucha gente, ya que en el lenguaje diario, una proposición condicional casi siempre lleva consigo un contenido de causa y efecto. Para sentirnos más cómodos respecto a la adopción de esta tabla, veamos el siguiente ejemplo de la vida real. Supongamos que tu papá te hace la siguiente promesa:

"Si apruebas el curso de Estructuras te llevo a Margarita"

En cualquiera de los tres casos siguientes la promesa no ha sido rota:

1. Aprobaste Estructuras y te llevaron a Margarita.

2. No aprobaste Estructuras y te llevaron a Margarita

3. No aprobaste Estructuras y no te llevaron a Margarita.

En cambio, en el siguiente caso, la promesa si ha sido rota.

4. Aprobaste Estructuras y no te llevaron a Margarita.

EJEMPLO 5 Todas las proposiciones condicionales siguientes son verdaderas, excepto la segunda:

1. Si 5 es primo, entonces $2 + 1 = 3$

2. Si 5 es primo, entonces $2 + 1 = 4$

3. Si 6 es primo, entonces $2 + 1 = 3$

4. Si 6 es primo, entonces $2 + 1 = 4$

En la matemática, las proposiciones condicionales tienen especial relevancia, debido a que la gran mayoría de sus teoremas son proposiciones de este tipo. En este caso, al antecedente se le llama **hipótesis** y al consecuente **tesis**

Hipótesis $\rightarrow$ Tesis

CONDICION NECESARIA Y CONDICION SUFICIENTE

Por razones de conveniencia vamos a cambiar las variables p y q en el condicional $p \rightarrow q$, por las variables s y n, y escribiremos: $s \rightarrow n$.

Se usan varias expresiones idiomáticas para indicar el condicional $s \rightarrow n$. Entre las más comunes tenemos la de "**condición necesaria y condición suficiente**". El **antecedente** (o hipótesis) es la **condición suficiente**, y el **consecuente** (o tesis) es la **condición necesaria**. Es decir, esquemáticamente, se tiene:

(suficiente) $\rightarrow$ (necesario)

De acuerdo a esta terminología, el condicional $s \rightarrow n$ puede ser leído de las siguientes maneras:

1. Si s, entonces n.

2. n es condición necesaria para s.

3. Una condición necesaria para s es n.

4. s es condición suficiente para n.

5. Una condición suficiente para n es s.

Existen tres maneras más:

6. n si s.

7. s sólo si n.

8. s solamente si n.

EJEMPLO 6 Sean las proposiciones:

t : La figura es un rectángulo c : La figura es un cuadrado

r : La figura es un rombo d : La figura es un cuadrilátero

Expresar simbólicamente las siguientes proposiciones:

1. La figura es un cuadrado sólo si la figura es un rectángulo.
2. Una condición suficiente para que la figura sea un rombo es que la figura sea un cuadrado.
3. Una condición necesaria para que la figura sea un rectángulo es que la figura sea un cuadrilátero.
4. Que la figura sea un cuadrado es una condición suficiente para que la figura sea un cuadrilátero.
5. Que la figura sea un cuadrado es condición necesaria para que la figura sea un rombo y un rectángulo.

Solución

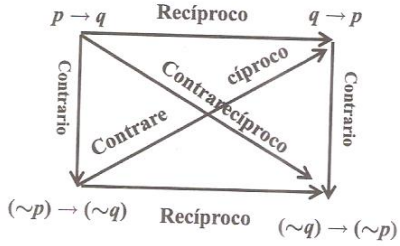
1. $c \to t$, 2. $c \to r$, 3. $t \to d$, 4. $c \to d$, 5. $(r \wedge t) \to c$

CONDICIONALES ASOCIADOS

A cada condicional $p \to q$ se le asocian otros tres que se obtienen permutando el antecedente con el consecuente o sus negaciones. Estos condicionales son los siguientes:

1. Directo: $p \to q$ **2. Recíproco:** $q \to p$

3. Contrario: $(\sim p) \to (\sim q)$ **4. Contrarrecíproco:** $(\sim q) \to (\sim p)$



Cualquiera de las cuatro proposiciones se puede tomar como directa, y a partir de ella construir las otras tres asociadas.

EJEMPLO 7 Enunciar el recíproco, contrario y contrarrecíproco del condicional:

Si el triángulo es equilátero, entonces el triángulo es isósceles.

Solución

Recíproco: Si el triángulo es isósceles, entonces el triángulo es equilátero.

Contrario: Si el triángulo no es equilátero, entonces el triángulo no es isósceles

Contrarrecíproco: Si el triángulo no es isósceles, entonces el triángulo no es equilátero

---

EL BICONDICIONAL

DEFINICION Sean p y q dos proposiciones. Se llama **bicondicional de p y q** a la proposición $p \leftrightarrow q$, que se lee **"p si y sólo si q"**, o **"p es condición necesaria y suficiente para q"**, y cuyo valor lógico es dado por la siguiente tabla:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

La tabla nos dice que $p \leftrightarrow q$ es verdadera cuando VL(p) = VL(q), y es falsa cuando VL(p) $\neq$ VL(q).

El nombre de bicondicional proviene del hecho de que $\mathbf{p \leftrightarrow q}$ es "equivalente" a $\mathbf{(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$. Este resultado lo justificaremos más adelante. Esta equivalencia también explica las expresiones idiomáticas: "p si y sólo si q" y "p es condición necesaria y suficiente para q". En efecto: "p si y sólo si q" es conjunción de "p si q" y "p solamente si q", que corresponden a los condicionales $q \rightarrow p$ y $p \rightarrow q$, respectivamente.

En forma similar, "p es condición necesaria y suficiente para q" es la conjunción de "p es condición necesaria para q" y "p es condición suficiente para q", que corresponden a los condicionales $q \rightarrow p$ y $p \rightarrow q$, respectivamente.

EJEMPLO 8 Si, p : $2 + 1 = 3$ si y sólo si $2 < 3$

q : $2 + 1 = 3$ si y sólo si $2 > 3$

r ; $2 + 1 = 4$ si y sólo si $2 > 3$

t : $2 + 1 = 4$ es condición necesaria y suficiente para que $2 < 3$.

entonces,

$$\text{VL}(p) = 1, \quad \text{VL}(q) = 0, \quad \text{VL}(r) = 1, \quad \text{VL}(t) = 0.$$

CIRCUITOS COMBINATORIOS

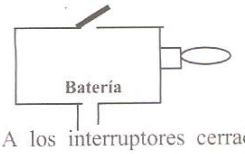
Las computadoras digitales están diseñadas para obtener salidas apropiadas a partir de entradas dadas. Tanto las entradas, como las salidas, son procesadas en términos de **bits** (**b**inary dig**its**); es decir, 0 ó 1. Todos los datos y programas se reducen, en última instancia, a combinaciones de bits. Se han utilizado variedad de recursos para procesar bits en una computadora. Para esto se han aprovechado los objetos de la vida real que, como las proposiciones, gozan de la propiedad de bivalencia (asumen sólo dos valores). Entre estos están el **interruptor o conmutador** (switch) de un circuito eléctrico, que puede estar **cerrado o abierto;** el **transistor** (inventado por los laboratorios Bell en 1.947), cuya corriente puede estar presente o ausente; un magneto, que puede magnetizarse positivamente o negativamente. Actualmente, las *computadoras digitales están construidas basándose en transistores. ¿Cómo* funcionan?. **Walter Issacson**, en un artículo dedicado a **Andrew Grove** (creador de Intel, la compañía que fabrica microchips) nos dice así: "Cada transistor sobre la superficie de un chip de silicón actúa como un switch que puede abrir o cerrar compuertas. Las computadoras procesan información manipulando sucesiones de compuertas abiertas y compuertas cerradas. Una carga positiva aplicada a una compuerta atrae electrones, permitiendo que la corriente fluya entre la entrada y la salida. Una carga negativa detiene la corriente y cierra la compuerta" (Revista TIME, 29-12-1.997).

Terminaremos esta sección haciendo una presentación breve sobre **circuitos combinatorios o circuitos lógicos.** Un circuito combinatorio puede pensarse como una "caja" que acepta un conjunto de entradas (imputs) y genera un conjunto de salidas (outputs). Cada entrada y cada salida es un bit. Los datos de salida están unívocamente determinados por la combinación de los datos de entrada. Un circuito combinatorio no tiene memoria; los datos de entrada anteriores al estado del sistema, no afectan los datos de salida. Los circuitos en los cuales los datos de salida dependan tanto de los datos del sistema como del estado del sistema se llaman **circuitos secuenciales.** De estos últimos no nos ocuparemos.

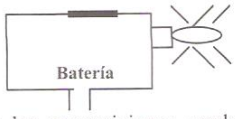
Todo circuito combinatorio, por complicado que sea, se puede construir sobre la base de unos pocos circuitos muy simples, a los que se les da el nombre de **compuertas lógicas** o, simplemente, **compuertas.** Las compuertas esenciales son tres: **Compuerta-NO**, **compuerta-Y** y **compuerta-O**, que las mostramos a continuación a través de los interruptores.

Ya vimos que un interruptor (swicht) tiene la cualidad de estar **abierto** o estar **cerrado**. Si está abierto no permite el paso de la corriente y si está cerrado, deja pasar la misma. Las figuras siguientes nos ilustran estas dos situaciones:

Interruptor abierto



Interruptor cerrado



A los interruptores cerrados, al igual que a las proposiciones verdaderas, les asignamos el valor **1**; y a los interruptores abiertos, al igual que las proposiciones

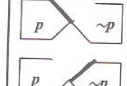
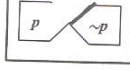
falsas, les asignamos el valor **0**. Llamaremos **valor de conducción (V. de C.)** de un interruptor al valor **1** ó 0 que le corresponda, según el interruptor esté abierto o cerrado.

A un interruptor lo simbolizaremos en la forma simple que indica la siguiente figura. Además, para representarlos, usaremos las mismas variables que para las proposiciones: p, q, r, s, t, etc.

La siguiente figura nos muestra dos interruptores cuyos estados de conducción son opuestos. Cuando uno está cerrado el otro está abierto, y viceversa.

A dos interruptores que se comportan de este modo se les llama **interruptores complementarios**. Si a uno de ellos se denota con p, el otro se denota con $\sim p$; que es la misma notación que usamos para una proposición y su negación.

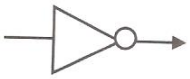
Construyamos la tabla del valor de conducción de dos circuitos complementarios.

CIRCUITO	p	$\sim p$
	1	0
	0	1

Observamos el hecho importante de que esta tabla de conducción coincide con la tabla de verdad de la negación de proposiciones.

A todos los circuitos cuyas tablas de conducción coincidan con la tabla anterior se les da el nombre genérico de **compuerta-No** o **inversor**, la cual se simboliza así:

Compuerta-NO
(~)



La conjunción de proposiciones corresponde, en la teoría de los circuitos, a la **conexión en serie** de interruptores. En efecto, la tabla de conducción de los dos interruptores conectados en serie coincide con la tabla de verdad de la conjunción.

Conexión en serie

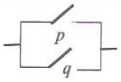
CIRCUITO	p	q	V. de C.
	1	1	1
	1	0	0
	0	1	0
	0	0	0

A todos los circuitos cuyas tablas de conducción coincidan con la tabla anterior se les da el nombre genérico de **compuerta-Y**, la cual se simboliza así:

Compuerta-Y
($\wedge$)

La disyunción de proposiciones corresponde, en la teoría de los circuitos, a la **conexión en paralelo** de interruptores. En efecto, la tabla de conducción de los dos interruptores conectados en paralelo coincide con la tabla de verdad de la disyunción.

Conexión en paralelo

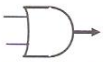


La tabla de conducción de esta conexión es la siguiente

CIRCUITO	p	q	V. de C.
	1	1	1
	1	0	1
	0	1	1
	0	0	0

A todos los circuitos cuyas tablas de conducción coincidan con la tabla anterior se les da el nombre genérico de **compuerta-O**, la cual se simboliza así:

Compuerta-O
($\vee$)

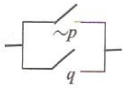


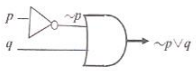
EJEMPLO 9 Determinar los circuitos, tanto en términos de interruptores como de compuertas, correspondientes a las proposiciones:

1. $\sim p \vee q$ **2.** $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$ **3.** $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

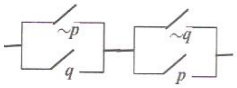
Solución.

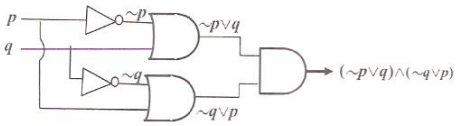
1.



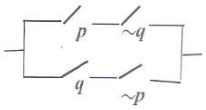


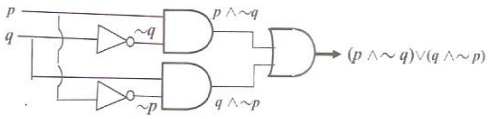
2.





3.





SIMBOLOGIA. En adelante, a un interruptor p representaremos simplemente así

—— p ——

PROBLEMAS RESUELTOS 1.2

PROBLEMA 1 Sean las proposiciones:

p : 2 es un número primo. q : 1/2 es un número racional.
r : 4 es un número par.

Traduce al lenguaje diario las siguientes proposiciones:

1. $p \wedge r$ **2.** $(\sim p) \veebar q$ **3.** $\sim(\sim p)$
4. $\sim((\sim p) \rightarrow q)$ **5.** $(p \wedge q) \rightarrow r$ **6.** $(r \vee (\sim q)) \rightarrow (\sim p)$

Solución

1. 2 es un número primo y 4 es un número par.

2. O 2 no es un número primo o 1/2 es un número racional.

3. No es cierto que 2 no es un número primo.

4. No es cierto que; si 2 no es número primo, entonces 1/2 es un número racional.

5. Si 2 es un número primo y 1/2 es un racional, entonces 4 es un número par.

6. Si 4 es un número par o 1/2 no es un número racional, entonces 2 no es un número primo.

PROBLEMA 2 Sean las proposiciones:

s : Los intereses suben d : El dinero escasea b : La inflación baja.

Escribir simbólicamente las siguientes proposiciones:

1. Si el dinero escasea, entonces los intereses suben y la inflación baja.

2. El dinero escasea sólo si la inflación baja.

3. Que el dinero escasee es condición necesaria para que los intereses suban.

4. Una condición suficiente para que los intereses suban es que la inflación baje.

5. Una condición necesaria para que el dinero escasee es que los intereses suban.

6. Para que la inflación no baje es suficiente que el dinero no escasee.

7. Una condición necesaria y suficiente para que los intereses no suban es que la inflación baje y el dinero escasee.

Solución

1. $d \rightarrow (s \wedge b)$ **2.** $d \rightarrow b$ **3.** $s \rightarrow d$ **4.** $b \rightarrow s$
5. $d \rightarrow s$ **6.** $(\sim d) \rightarrow (\sim b)$ **7.** $(\sim s) \leftrightarrow (b \wedge d)$

PROBLEMA 3 Sean las proposiciones:

p : $5 > 7$, r : $5 + 15 = 20$

Hallar el valor lógico de:

1. $p \wedge r$ **2.** $(\sim p) \wedge r$ **3.** $r \rightarrow p$ **4.** $\sim(r \leftrightarrow (\sim p))$

Solución

Tenemos que $\mathrm{VL}(p) = 0$, $\mathrm{VL}(\sim p) = 1$ y $\mathrm{VL}(r) = 1$. Luego,

1. $\mathrm{VL}(p \wedge r) = 0$
2. $\mathrm{VL}((\sim p) \wedge r) = 1$
3. $\mathrm{VL}(r \rightarrow p) = 0$
4. $\mathrm{VL}(\sim(r \leftrightarrow (\sim p))) = 0$

PROBLEMA 4 Identificar el antecedente (**a**) y el consecuente (**c**) de cada una de los siguientes condicionales.

1. Que llueva y haga frío son condiciones suficientes para que estemos en invierno.
2. Que el asesino no fuera un fanático solitario es condición necesaria para que Kennedy muriera víctima de un complot
3. $x^2 = 4$ solamente si $x = 2$
4. Una condición necesaria para que Alemania gane el campeonato mundial es que Brasil no compita.

Solución

1. $\underbrace{\text{Que llueva y haga frío}}_{\mathbf{a}}$ son condiciones suficientes para que $\underbrace{\text{estemos en invierno}}_{\mathbf{c}}$
2. Que $\underbrace{\text{el asesino no fuera un fanático solitario}}_{\mathbf{c}}$ es condición necesaria para que $\underbrace{\text{Kennedy muriera víctima de un complot}}_{\mathbf{a}}$
3. $\underbrace{a^2 = 4}_{\mathbf{a}}$ solamente si $\underbrace{a = 2}_{\mathbf{c}}$
4. Una condición necesaria para que $\underbrace{\text{Alemania gane el campeonato mundial}}_{\mathbf{a}}$ es que $\underbrace{\text{Brasil no compita}}_{\mathbf{c}}$

PROBLEMA 5 **1.** ¿Cuántas operaciones binarias veritativas existen?. O sea, ¿cuántos conectivos lógicos binarios se pueden definir?

2. ¿Cuáles son éstas?

Soluciones

1. La tabla de verdad de una operación binaria tiene 4 filas. Como para cada fila podemos asignarle 2 valores lógicos (1 ó 0), entonces tenemos:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$$

tablas de verdad y, por tanto, 16 operaciones binarias veritativas.

2. Estas son:

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0

Observar que:

a. Las columnas 2, 4, 7, 11 y 12 corresponden a las conectivas $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\veebar$, y $\wedge$, respectivamente.

b. La columna 13 es la negación de $\vee$, la 15 es la negación de $\rightarrow$.

c. La columna 5 es la negación de $\wedge$.

d. Las columnas 7 y 11 nos dicen que $\veebar$ es la negación de $\leftrightarrow$.

La primera columna tiene la particularidad especial de que todas sus entradas son 1. En cambio, todas las entradas de la última columna son 0. De la primera se dice que es una **tautología** y de la última, una **contradicción**. Gran parte del resto de este capítulo lo dedicaremos a estudiar las tautologías.

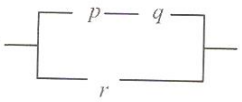
PROBLEMA 6 Construir el circuito que corresponda a las siguientes expresiones:

1. $(p \wedge q) \vee r$ **2.** $p \wedge (q \vee r)$

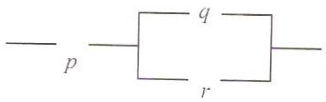
3. $r \wedge (p \vee (q \wedge s))$ **4.** $r \wedge [(p \vee q) \wedge s]$

Solución

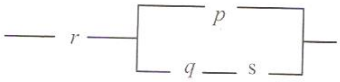
1.



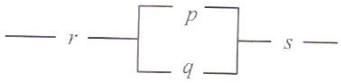
2.



3.



4.



PROBLEMAS PROPUESTOS 1.2

1. Simbolizar las siguientes proposiciones, usando para las proposiciones atómicas las variables que se sugieren.

11	12	13	14	15	16
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0

nectivas $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\veebar$, y $\wedge$,

ión de $\rightarrow$.

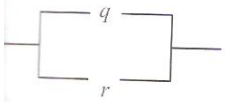
de $\leftrightarrow$.

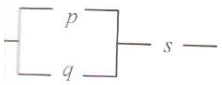
e que todas sus entradas son son 0. De la primera se dice . Gran parte del resto de este

a las siguientes expresiones:

2. $p \wedge (q \vee r)$

4. $r \wedge [(p \vee q) \wedge s]$





TOS 1.2

las proposiciones atómicas

a. Maracaibo es la capital del Estado Zulia (m).

b. No es cierto que Bolívar libertó a Panamá. (p).

c. $x = \pm 2$ es necesario para que $x^2 = 4$. (d, c).

d. Si 6 es múltiplo de 2, y 12 es múltiplo de 2, entonces no es cierto que 3 es múltiplo de 2. (s, d, t).

e. Un cuadrilátero tiene 4 lados si y sólo si un pentágono tiene 5 lados. (c, p).

f. Aprobaré el examen y me iré a la fiesta o no lo aprobaré y me darán una paliza. (a, f, p).

g. Voy a mi casa sólo si quiero almorzar. (v, a).

h. Para que mejore la situación económica actual de Venezuela es necesario que se solucione la crisis petrolera. (v, p).

i. Una condición suficiente para que las rectas A y B se corten es que A y B sean perpendiculares. (c, p).

j. n es impar sólo si n es de la forma $2k + 1$. (p, f).

k. Para que $y + 7 = 10$ es suficiente que $y = 3$. (d, t).

l. Es falso que, la tierra es un planeta y el sol es una estrella. (t, s).

m. Juan cursó Cálculo y, si estudió mucho, la aprobó. (c, e, a).

n. O Juan tiene 15 ó 17 años y; si tiene 18 años, entonces es mayor de edad. (q, s, o, m).

o. 4 es múltiplo de 2 si y sólo si 0 es par o $4 + 5 = 10$. (c, p, m).

p. Iremos a la fiesta, siempre que esta noche no llueva. (f, l).

q. Mérida es muy bella, pero muy fría. (b, f).

r. Es falso que; 3 es primo o es impar, pero 2 es primo y es par. (t, i, d, p).

s. O voy al cine y descanso o no voy al parque y me quedo a leer. (c, d, p, l).

t. Apruebo la materia cuando estudio mucho. (a, e).

u. Si el hidrógeno y el oxígeno están presentes y el nitrógeno está ausente, entonces el agua es inodora si y sólo si no es un gas. (h, o, n, i, g).

v. María es bella o elegante, pero es muy tímida. (b, e, t).

w. 8 es número par, siempre que sea divisible por 2. (p, d).

x. Es condición necesaria para que pase el curso que estudie mucho. (p, e).

y. Que sea feliz es condición suficiente para que viva en mi casa y estudie en la universidad. (f, c, u).

2. Escribir el recíproco (**R**), el contrario (**C**) y el contrarrecíproco (**CR**) de cada uno de los siguientes condicionales:

a. Si $x+2=7$, entonces $x=5$

b. Si el condicional es falso, entonces la conjunción no es falsa.

c. Una condición necesaria para que $y+1=5$ es $y \neq 2$

d. $2x+5=1$ es condición suficiente para que $x^3=-8$.

e. Yo estudio, siempre que llegue temprano a casa.

f. Yo entiendo la materia cuando voy a clases.

3. Escribir cada una de las siguientes expresiones sin usar el símbolo de la negación.

a. $\sim(x>y)$ **b.** $\sim(x<y)$ **c.** $\sim(x \leq y)$ **d.** $\sim(x \geq y)$.

4. Hallar el valor lógico de las siguientes proposiciones:

a. π es racional $\vee$ $\sqrt{2}$ es real. **b.** $2<1 \vee 5 \geq 7$

c. $5<2 \rightarrow 4<6$ **d.** $\sqrt{4}=2 \rightarrow 2 \leq 0$

e. $3<1 \leftrightarrow 7 \leq 6$

5. Sea p: $2 \times 3 = 5$ y q: $2^3=8$

Determinar el valor lógico de cada una de las siguientes proposiciones

a. $p \vee q$ **b.** $\sim p \wedge q$ **c.** $(\sim p) \veebar (\sim q)$ **d.** $\sim(\sim q)$

e. $\sim(p \wedge (\sim q))$ **f.** $\sim(p \rightarrow q)$ **g.** $p \leftrightarrow (\sim q)$

6. Construir los circuitos correspondientes a las siguientes expresiones:

a. $[(p \wedge q) \vee r] \wedge (t \vee \sim q)$ **b.** $(p \wedge q) \vee [(p \wedge r) \vee \sim s]$

c. $\{[r \wedge (p \vee q)] \vee [(p \vee q) \wedge (q \wedge r)]\} \wedge [p \wedge (q \vee r)]$

7. Sean las proposiciones:

p: París está en Francia b: Bolívar nació en Caracas.

c: Cervantes escribió la Ilíada. s: Sócrates murió en España.

Traducir al lenguaje diario las siguientes proposiciones:

a. $(p \wedge b) \rightarrow \sim c$ **b.** $\sim(p \rightarrow \sim b) \leftrightarrow (c \wedge s)$ **c.** $(\sim p \veebar b) \wedge (c \rightarrow \sim s)$

d. $(b \wedge \sim s) \veebar (p \rightarrow c)$ **e.** $[p \wedge (b \wedge c)] \veebar \sim s$ **f.** $(p \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow s)$

g. $(\sim c \vee b) \leftrightarrow (p \wedge \sim s)$.

8. Hallar el valor de verdad de las proposiciones del ejercicio anterior.

9. **a.** ¿ Cuántas operaciones unitarias veritativas existen?. O, lo que es lo mismo, ¿Cuántos conectivos lógicos unitarios se pueden definir?

b. ¿Cuáles son éstas?

ıtrarrecíproco (**CR**) de cada uno

ón no es falsa.
$y \neq 2$
$= -8$.
a.

usar el símbolo de la negación.
d. $\sim(x \geq y)$.

es:
$2 < 1 \vee 5 \geq 7$
$\sqrt{4} = 2 \rightarrow 2 \leq 0$

ntes proposiciones
$(\sim q)$ **d.** $\sim(\sim q)$
$q)$

ntes expresiones:
$\vee [(p \wedge r) \vee \sim s]$
$q \vee r)]$

ar nació en Caracas.
ntes murió en España.
es:
c. $(\sim p \veebar b) \wedge (c \rightarrow \sim s)$
f. $(p \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow s)$

rcicio anterior.

n?. O, lo que es lo mismo,
definir?

SECCION 1.3
FORMAS PROPOSICIONALES

A las expresiones que se obtienen a partir de variables proposicionales: p, q, r, etc., mediante aplicaciones de los conectivos lógicos, se llaman **formas proposicionales.** A las formas proposicionales las denotaremos con letras mayúsculas A, B, C, etc. En caso de que queramos enfatizar las variables que intervienen en éstas, escribiremos así: $A(p, q)$, $B(p_1, p_2, p_3)$, etc.

EJEMPLO 1 Son formas proposicionales las siguientes expresiones:

1. $A(p, q) = \sim[p \rightarrow (\sim q)]$
2. $B(p, q, r) = p \wedge (q \wedge r)$
3. $C(p_1, p_2, p_3) = p_1 \rightarrow [p_2 \leftrightarrow (p_3 \wedge (\sim p_1))]$

Para ser precisos, definimos **forma proposicional** como una expresión que se obtiene siguiendo las siguientes reglas:

1. Todas las variables proposicionales son formas proposicionales. A estas las llamaremos **formas proposicionales atómicas.**
2. Si A y B son formas proposicionales, entonces también lo son:

$$\sim A,\ A \wedge B,\ A \vee B,\ A \veebar B,\ A \rightarrow B \text{ y } A \leftrightarrow B.$$

SIGNOS DE AGRUPACION

Los signos de agrupación, paréntesis, corchetes, etc., son usados en la construcción de formas proposicionales para evitar las ambigüedades. Así, los paréntesis nos permiten diferenciar las dos formas

$$(p \vee q) \wedge r \quad \text{y} \quad p \vee (q \wedge r),$$

que tienen significaciones distintas. En $(p \vee q) \wedge r$, la conectiva principal es $\wedge$. En cambio, en la forma $p \vee (q \wedge r)$ la conectiva principal es $\vee$.

Se llama **conectivo principal** de una forma proposicional (no atómica) al último conectivo que se usó para construir la forma proposicional. Así, en $p \rightarrow (q \wedge t)$ la conectiva principal es $\rightarrow$. En cambio, en $(p \rightarrow q) \wedge t$ es $\wedge$, y en $\sim(p \leftrightarrow q)$ es $\sim$.

Con el objeto de aligerar la escritura, vamos a adoptar las siguientes convenciones, que nos permiten eliminar algunos signos de agrupación sin caer en ambigüedades.

Convención 1: Asignamos el siguiente rango a cada conectiva:

$\leftrightarrow$	rango 4
$\rightarrow$	rango 3
$\wedge, \vee, \veebar$	rango 2
$\sim$	rango 1

Además, establecemos que el rango de una forma proposicional atómica es 0 y que el rango de una forma proposicional no atómica es el rango de su conectiva principal. Así, $p \wedge (q \leftrightarrow r)$ es de rango 2, $\sim(p \rightarrow q)$ es de rango 1 y $p \leftrightarrow (q \veebar r)$ es de rango 4.

Convención 2: Escribiremos $\sim\sim p$ en lugar de $\sim(\sim p)$.

Convención 3: Si una forma proposicional es de la forma $(A)\ \alpha\ B$, donde α representa a una de las conectivas $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ o $\veebar$, y si el rango de α es mayor que el rango de A, entonces se escribirá $A\ \alpha\ B$ en lugar de $(A)\ \alpha\ B$.

Similarmente, si se tiene $A\ \alpha\ (B)$ y el rango de α es mayor que B, entonces se escribirá $A\ \alpha\ B$ en lugar de $A\ \alpha\ (B)$.

EJEMPLO 2. **a.** $(p \wedge q) \leftrightarrow r$ se puede escribir: $p \wedge q \leftrightarrow r$.

En efecto, como el rango de $\leftrightarrow$ es mayor que el de $p \wedge q$, los paréntesis pueden suprimirse.

b. $(\sim p) \rightarrow (\sim q)$ puede escribirse: $\sim p \rightarrow \sim q$.

En efecto, como el rango de $\rightarrow$ es mayor que el de $\sim p$ y el de $\sim q$, los dos juegos de paréntesis pueden ser suprimidos.

c. $[(p \vee q) \vee t] \leftrightarrow [\sim(\sim p) \wedge s]$ puede escribirse: $(p \vee q) \vee t \leftrightarrow \sim\sim p \wedge s$

En efecto, como el rango de $\leftrightarrow$ es mayor que el rango de las proposiciones de ambos extremos, los dos pares de corchetes pueden ser eliminados.

EJEMPLO 3 Colocar los signos de agrupación a la siguiente forma proposicional:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim t \vee \sim (p \veebar t)$$

Solución

El conectivo de mayor rango es $\leftrightarrow$, entonces agrupamos del modo siguiente:

$$[p \rightarrow q] \leftrightarrow [\sim t \vee \sim (p \veebar t)]$$

Además, como el conectivo de mayor rango en $\sim t \vee \sim(p \veebar t)$ es $\vee$, esta última expresión se agrupa así, $(\sim t) \vee (\sim (p \veebar t))$

Finalmente tenemos:

$$[p \rightarrow q] \leftrightarrow [(\sim t) \vee (\sim(p \veebar t))]$$

TABLA DE VERDAD DE FORMAS PROPOSICIONALES

Como cada forma proposicional está definida únicamente mediante operaciones veritativas, el valor lógico de una forma proposicional depende únicamente de los valores lógicos que se asigne a sus variables proposicionales. Para el cálculo de este valor se usan las tablas de verdad.

EJEMPLO 4 Construir la tabla de verdad de la proposición $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow q$

Solución

Existen dos métodos. El método **acumulativo** y el método **abreviado**.

Metodo acumulativo.

Se asigna una columna para cada variable proposicional y una columna para cada operación indicada, conservando el orden en que estas se llevaron a cabo.

En el caso de $(p \vee \sim q) \leftrightarrow q$, la primera operación que se llevó a cabo fue la negación, siguió la disyunción, y luego el bicondicional

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \leftrightarrow q$
1	1	0	0	**0**
1	0	1	1	**0**
0	1	0	0	**0**
0	0	1	0	**1**

El orden en que se asignan los valores lógicos a las variables proposicionales p y q es arbitrario. Sin embargo, nosotros convenimos en mantener el orden en que aparecen en las dos primeras columnas de la tabla.

Metodo abreviado.

Este es el método que más usaremos, ya que nos permite ahorrar tiempo y espacio. Como primer paso se escribe directamente la forma proposicional asignando inmediatamente valores lógicos a las variables proposicionales (nivel 1) y a las negaciones de éstas (nivel 2). Luego se asignan los valores a las conectivas conservando el orden en que éstas se usaron para construir la forma proposicional.

p	q	$(p \wedge \sim q) \leftrightarrow q$
1	1	0 0 **0**
1	0	1 1 **0**
0	1	0 0 **0**
0	0	0 1 **1**
1	1	3 2 **4**

EJEMPLO 5. Construir la tabla de verdad de $[p \to (q \vee \sim r)] \wedge \sim[p \leftrightarrow r]$

Solución.

p	q	r	$[p \to (q \vee \sim r)]$			$\wedge$	$\sim[p \leftrightarrow r]$	
1	1	1	1	1	0	**0**	0	1
1	1	0	1	1	1	**1**	1	0
1	0	1	0	0	0	**0**	0	1
1	0	0	1	1	1	**1**	1	0
0	1	1	1	1	0	**1**	1	0
0	1	0	1	1	1	**0**	0	1
0	0	1	1	0	0	**1**	1	0
0	0	0	1	1	1	**0**	0	1
1	1	1	4	3	2	**5**	4	3

OBSERVACION. El número de filas de la tabla de verdad de una forma proposicional depende del número de variables proposicionales que aparecen. Si una forma proposicional tiene n variables, entonces su tabla de verdad tiene $\mathbf{2^n}$ filas. Esto es consecuencia del hecho de que existan 2 posibilidades para el valor lógico de cada variable proposicional.

TAUTOLOGIAS Y CONTRADICCIONES

Hemos llegado al punto crucial de este capítulo: El concepto de **tautología**.

DEFINICION. Una **tautología** es una forma proposicional que es verdadera para cualquier valor lógico que se le asigne a sus variables proposicionales. En otras palabras, una forma proposicional es una tautología si en su tabla de verdad, la columna bajo su conectiva principal está formada sólo por "unos".

Una **contradicción** es una forma proposicional que es falsa para cualquier valor lógico que se le asigne a sus variables proposicionales; o sea, si la columna bajo su conectiva principal está formada sólo por "ceros".

Es claro que la negación de una tautología es una contradicción y que la negación de una contradicción es una tautología. Esto es, A es una tautología si y sólo si $\sim A$ es una contradicción, y A es una contradicción si y sólo si $\sim A$ es una tautología.

EJEMPLO 6 $(p \wedge q) \to p$ es una tautología.

En efecto:

$(q \vee \sim r)] \wedge \sim[p \leftrightarrow r]$

$[p \leftrightarrow r]$
1
0
1
0
0
1
0
1
3

ia de verdad de una forma
de variables proposicionales
posicional tiene n variables,
filas. Esto es consecuencia
idades para el valor lógico de

CCIONES

cepto de **tautología**.

proposicional que es verdadera
se le asigne a sus variables
s, una forma proposicional es
verdad, la columna bajo su
ólo por "unos".

a proposicional que es falsa
se le asigne a sus variables
na bajo su conectiva principal

ntradicción y que la negación
una tautología si y sólo si $\sim A$
si $\sim A$ es una tautología.

p	q	$(p \wedge q) \rightarrow q$
1	1	1 **1**
1	0	1 **1**
0	1	0 **1**
0	0	0 **1**
1	1	2 **3**

EJEMPLO 7 $p \vee \sim p$ es una tautología y $p \wedge \sim p$ es una contradicción.

En efecto:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
1	0	**1**
0	1	**1**

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
1	0	**0**
0	1	**0**

A las tautologías se las llama también **leyes de la lógica.** A algunas de estas, debido al papel fundamental que desempeñan en el desarrollo de la teoría del cálculo proposicional, se les ha asignado un nombre propio. Así, a la tautología $p \vee \sim p$ del ejemplo anterior, se le conoce con el nombre de **ley (o principio) del tercio excluido.** Esta ley afirma que una proposición, o es verdadera, o es falsa, quedando excluida una tercera posibilidad.

PROBLEMAS RESUELTOS 1.3

PROBLEMA 1 Construir la tabla de verdad de de las siguientes formas proposicionales:

a. $(p \veebar q) \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$

b. $(p \rightarrow r) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \vee r)]$

Solución

a. $(p \veebar q) \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$

p	q	$(p \veebar q) \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$							
1	1	0	**1**	0	0	0	0	0
1	0	1	**1**	1	1	1	0	0
0	1	1	**1**	0	0	1	1	1
0	0	0	**1**	0	1	0	0	1
1	1	3	**5**	3	2	4	3	2

Observa que esta proposición es una tautología.

b. $(p \to r) \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \vee r)]$

p	q	r	$(p \to r)$	$\leftrightarrow$	$[(p \to q)$	$\wedge$	$(q \vee r)]$
1	1	1	1	**1**	1	1	1
1	1	0	0	**0**	1	1	1
1	0	1	1	**0**	0	0	1
1	0	0	0	**1**	0	0	0
0	1	1	1	**1**	1	1	1
0	1	0	1	**1**	1	1	1
0	0	1	1	**1**	1	1	1
0	0	0	1	**0**	1	0	0
1	1	1	2	**4**	2	3	2

PROBLEMA 2 Si $VL[(p \wedge q) \to r] = 0$, hallar $VL(p)$, $VL(q)$ y $VL(r)$

Solución

De acuerdo a la tabla de verdad del condicional sabemos que:

$VL[(p \wedge q) \to r] = 0$, entonces $VL(p \wedge q) = 1$ y $VL(r) = 0$.

De $VL(p \wedge q) = 1$, obtenemos que $VL(p) = 1$ y $VL(q) = 1$.

En conclusión, tenemos que $VL(p) = 1$, $VL(q) = 1$ y $VL(r) = 0$.

Todo el argumento anterior puede sintetizarse en el siguiente esquema:

$$\underbrace{\underbrace{(p \wedge q)}_{1\ \ 1} \to \underbrace{r}_{0}}_{1\ \ \ \

$\rightarrow r) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \vee r)]$				
1	**1**	1	1	1
0	**0**	1	1	1
1	**0**	0	0	1
0	**1**	0	0	0
1	**1**	1	1	1
1	**1**	1	1	1
1	**1**	1	1	1
1	**0**	1	0	0
2	**4**	2	3	2

VL(p), VL(q) y VL(r)

bemos que:

1 y VL(r) = 0.

L(q) = 1.

= 1 y VL(r) = 0.

l siguiente esquema:

ión:

A.M. y Lucy llegó a la hora
15 minutos más temprano que

anterior es falsa contestar las

a para el examen?

Solución

Si

e : El examen comenzó a las 8 A. M

h : Lucy llegó a la hora indicada.

t : Petra llegó 15 minutos más temprano que Lucy

p : Petra presentó el examen,

entonces la proposición anterior, simbólicamente es

$$(e \wedge h) \rightarrow (\sim t \vee \sim p)$$

$$\underbrace{\underbrace{1 \quad 1}_{1} \quad \underbrace{0 \quad 0}_{0}}_{0}$$

Vemos que VL(e) = 1, VL(h) = 1, VL($\sim t$) = 0 y VL($\sim p$) = 0.

En consecuencia: **a.** Lucy sí llegó a la hora indicada.

b. Petra llegó a las 7.45 A.M.

c. Petra sí presentó el examen.

PROBLEMA 4 Simbolizar la siguiente proposición:

El campeonato no dio sorpresas y los Tiburones ganaron la copa si y sólo si o los Cardenales no participaron o los Tiburones no ganaron la copa.

Sabiendo que la proposición anterior es verdadera y los Cardenales sí participaron, contestar las siguientes preguntas:

a. ¿Dio sorpresas el campeonato?

b. ¿Ganaron la copa los Tiburones?

Solución

Sean s : El campeonato dio sorpresas

t : Los Tiburones ganaron la copa

c : Los Cardenales participaron.

La proposición dada, simbólicamente, se escribe así:

$$(\sim s \wedge t) \leftrightarrow (\sim c \veebar \sim t)$$

Nos dicen que VL(c) = 1, o sea que VL($\sim c$) = 0. Además, como el bicondicional es verdadero, debemos considerar dos casos:

Caso 1

$(\sim s \wedge t) \leftrightarrow (\sim c \veebar \sim t)$

1 1 **0** 1

1 1

1

Caso 2

$(\sim s \wedge t) \leftrightarrow (\sim c \veebar \sim t)$

0 1 **0** 0

0 0

1

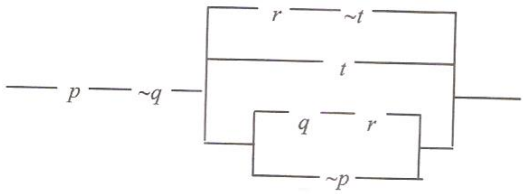
El caso 1 es descartado, ya que no se puede cumplir que $VL(t) = 1$ y $VL(\sim t) = 1$.

Luego, nos quedamos con el caso 2, en el que tenemos $VL(\sim s) = 0$ y $VL(t) = 1$.

En consecuencia:

a. El campeonato dio sorpresas y **b.** Los Tiburones ganaron la copa.

PROBLEMA 5 Hallar la forma proposicional del siguiente circuito.



Solución

$$(p \wedge \sim q) \wedge [((r \wedge \sim t) \vee t) \vee ((q \wedge r) \vee \sim p)]$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.3

1. Eliminar tantos signos de agrupación como sea posible en:

a. $(\sim p) \wedge \{[\sim (\sim(q \rightarrow p)]\}$ **b.** $[p \rightarrow (q \wedge r)] \rightarrow [p \wedge (\sim (\sim q))]$

2. Dada la siguiente expresión: $\sim p \rightarrow q \wedge r \vee m \leftrightarrow t$.

Utilizar los signos de agrupación necesarios para que ésta sea:

a. Conjunción de un condicional con un bicondicional

b. Disyunción de un condicional con un bicondicional

c. Disyunción de una conjunción con un bicondicional

d. Negación de un condicional con consecuente una disyunción.

3. Construir la tabla de verdad de las siguientes proposiciones:

a. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge (p \leftrightarrow q)$ **b.** $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

c. $\sim(p \wedge q \rightarrow q)$

4. Simbolizar las siguientes proposiciones usando, para las proposiciones atómicas, las variables que se sugieren:

   a. No es cierto que, si Páez es llanero entonces Sucre es margariteño (p, s)

   b. El cáncer no es contagioso, sea mortal o no (c, m)

   c. O se equilibra el presupuesto y se evita el despilfarro, o si no se quiere cerrar la universidad, se eliminará el exceso de burocracia (p, d, u, b)

   d. Si el sospechoso estuvo en la playa, entonces no estuvo en la ciudad, y si no estuvo en la ciudad, entonces no robó el banco (p, c, r)

   e. No es cierto que, si se busca el confort en la vivienda, no se busque su seguridad o su belleza (c, s, b).

5. Si $VL(p) = 1$, $VL(q) = 1$ y $VL(r) = 0$, hallar el valor lógico de:

   a. $(p \wedge \sim q) \wedge r$ **b.** $(p \rightarrow q) \veebar (\sim q \rightarrow r)$

   c. $(p \wedge q) \leftrightarrow [p \vee (q \wedge \sim r)]$ **d.** $(p \leftrightarrow \sim r) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p \vee r)$

6. Si el valor lógico de $[(\sim p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow \sim q$ es 0, hallar $VL(p)$ y $VL(q)$.

7. Si el valor lógico de $(m \wedge \sim r) \rightarrow [(m \vee \sim r) \leftrightarrow (\sim t \rightarrow r)]$ es 0, hallar $VL(m)$, $VL(r)$ y $VL(t)$.

8. Si el valor lógico de $p \vee (q \wedge r) \rightarrow q$ es 0 y el valor lógico de $p \wedge (q \veebar r)$ es 1, hallar $VL(p)$, $VL(q)$ y $VL(r)$.

9. Si el valor lógico de $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r)$ es 1 y el valor lógico de $p \leftrightarrow (\sim q \wedge r)$ es 1, hallar $VL(p)$, $VL(q)$ y $VL(r)$.

10. Sea la proposición:

    Si la función de las 9.30 p.m. en el cine empezó a la hora exacta y Pedro llegó a tiempo, entonces María no llegó 30 minutos más temprano que Pedro o no asistió a esta función.

    Si esta proposición es falsa, responder las siguientes preguntas:

    a. ¿Llegó a tiempo Pedro?

    b. ¿Asistió María a la función?

    c. ¿A qué hora llegó María?

11. Sea la proposición:

    Lloré por mi amada y el alcaraván compañero le contó al barranco, si y sólo si o el gallito lagunero no la fue a buscar o el alcaraván compañero no le contó al barranco.

    Si la proposición es verdadera y el gallito lagunero sí la fue a buscar, contestar las siguientes preguntas:

    a. ¿Lloré por mi amada? **b.** ¿El alcaraván compañero le contó al barranco?

12. Sea la proposición:

O no veo televisión y hago gimnasia o si hago gimnasia, no hago dieta ni veo televisión.

Si la proposición es falsa y sí se hizo dieta, determinar:

a. ¿Se hizo gimnasia? **b.** ¿se vio televisión?

13. Probar, mediante tablas de verdad, que las siguientes formas proposicionales son tautologías.

a. $(p \to q \vee r) \leftrightarrow [\sim r \to (p \to q)]$ **b.** $(p \to \sim r) \wedge (\sim q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \vee \sim r)$

c. $(p \to q) \wedge (r \to s) \to (p \vee r \to q \vee s)$

14. Probar, mediante tablas de verdad, que las siguientes formas proposicionales son contradicciones.

a. $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ **b.** $(\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r) \leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$

SECCION 1.4
EQUIVALENCIA LOGICA Y ALGEBRA DE PROPOSICIONES

Dos tipos de tautologías, sobre las que descansa la teoría de la deducción, son las **equivalencias lógicas** y las **implicaciones**. Estas son tautologías que tienen la forma del bicondicional y del condicional, respectivamente. Veamos las primeras. De la otra nos ocuparemos más adelante.

EQUIVALENCIA LOGICA

DEFINICION. Sean A y B dos formas proposicionales. Diremos que A **es lógicamente equivalente a** B, o simplemente que A **es equivalente a** B, y escribiremos:

$$\mathbf{A \Leftrightarrow B} \quad \text{ó} \quad \mathbf{A \equiv B}$$

si y sólo si la forma **bicondicional** $A \leftrightarrow B$ **es una tautología.**

Observar que $A \leftrightarrow B$ es una tautología si y sólo si A y B tienen los mismos valores lógicos. Esto significa que, desde el punto de vista veritativo, no hay diferencia entre dos formas proposicionales equivalentes.

EJEMPLO 1. **Ley del condicional.**

Probar que $p \to q$ es lógicamente equivalente a $\sim p \vee q$. Esto es,

$$p \to q \equiv \sim p \vee q$$

Solución

Debemos probar que $(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ es una tautología. En efecto:

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim p$	$\vee$	$q)$
1	1	1	**1**	0	1	1
1	0	0	**1**	0	0	0
0	1	1	**1**	1	1	1
0	1	0	**1**	1	1	0

ALGEBRA DE PROPOSICIONES

Existen abundantes equivalencias lógicas. Sin embargo, todas estas pueden deducirse a partir de unas pocas equivalencias fundamentales, a las que llamaremos **leyes del álgebra de proposiciones** y aparecen en el cuadro que sigue. Convenimos en usar los números **1** y **0** para representan a cualquier tautología y a cualquier contradicción, respectivamente.

LEYES DEL ALGEBRA DE PROPOSICIONES

Leyes Idempotentes

1a. $p \vee p \equiv p$ 1b. $p \wedge p \equiv p$

Leyes Asociativas

2a. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ 2b. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Leyes Conmutativas

3a. $p \vee q \equiv q \vee p$ 3b. $p \wedge q \equiv q \wedge p$

Leyes Distributivas

4a. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 4b. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Leyes de Identidad o de Elemento Neutro

5a. $p \vee \mathbf{0} \equiv p$ 5b. $p \wedge \mathbf{1} \equiv p$

Leyes de Dominación

6a. $p \vee \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$ 6b. $p \wedge \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$

Leyes de Complementación

7a. Tercio excluido $p \vee \sim p \equiv \mathbf{1}$

7b. Contradicción $p \wedge \sim p \equiv \mathbf{0}$

8a. Doble negación: $\sim\sim p \equiv p$

8b. $\sim\mathbf{1} \equiv \mathbf{0}$, $\sim\mathbf{0} \equiv \mathbf{1}$

Leyes de De Morgan

9a. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ 9b. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

OBSERVACION La ley 2a nos permite eliminar los paréntesis y escribir

$$p \vee q \vee r,$$

en lugar de $(p \vee q) \vee r$ o de $p \vee (q \vee r)$, sin temor de caer en ambigüedades.

Similarmente, la ley 2b nos permite escribir

$$p \wedge q \wedge r,$$

para representar a $(p \wedge q) \wedge r$ o a $p \wedge (q \wedge r)$

Complementemos el cuadro anterior con otras equivalencias lógicas que también son importantes.

OTRAS EQUIVALENCIAS NOTABLES

Ley del Condicional: $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Ley del Bicondicional: $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Ley de Disyunción Exclusiva: $p \underline{\vee} q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

Ley del Contrarrecíproco: $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

Ley de Reducción al Absurdo: $(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q \rightarrow 0)$

Ley de Demostración por Casos:

$$[(p \vee q) \rightarrow r] \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

Leyes de la Absorción:

a. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ **b.** $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Todas las equivalencias de ambos cuadros deben ser probadas. Para esto, sólo se tiene que verificar que el bicondicional correspondiente es una tautología. Esta tarea ya ha sido parcialmente cumplida. Así, las leyes de complementación 7a y 7b ya han sido verificadas en el ejemplo 7 de la sección anterior; la ley del condicional fue probada en el ejemplo 1 de esta sección; la ley de la disyunción exclusiva fue verificada en el problema resuelto 1 de la sección anterior. Probaremos otras leyes a continuación. La prueba de las restantes queda como ejercicio para el lector.

---

los paréntesis y escribir

$p \vee (q \vee r)$, sin temor de caer en

permite escribir

o a $p \wedge (q \wedge r)$

valencias lógicas que también

TABLES

$p \vee q$

$p \to q) \wedge (q \to p)$

$\wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

$\sim q \to \sim p$

$(p \wedge \sim q \to \mathbf{0})$

$] \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$

b. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

probadas. Para esto, sólo se es una tautología. Esta tarea plementación 7a y 7b ya han la ley del condicional fue a disyunción exclusiva fue r. Probaremos otras leyes a cicio para el lector.

EJEMPLO 2 **a.** Probar la **primera ley de De Morgan**: $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.
b. Probar la **ley del contrarrecíproco:** $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$.

Solución

En efecto, los siguientes bicondicionales son tautologías:

a.

$\sim$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\leftrightarrow$	$\sim p$	$\wedge$	$\sim q$
0	1	1	1	**1**	0	0	0
0	1	1	0	**1**	0	0	1
0	0	1	1	**1**	1	0	0
1	0	0	0	**1**	1	1	1

b.

$(p$	$\to$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim q$	$\to$	$\sim p)$
1	1	1	**1**	0	1	0
1	0	0	**1**	1	0	0
0	1	1	**1**	0	1	1
0	1	0	**1**	1	1	1

Observa que las 3 primeras leyes del cuadro de equivalencias notables nos muestran la interrelación entre los conectivos lógicos elementales. Así, la ley del condicional nos dice que el condicional puede expresarse en términos de la negación y de la disyunción. Es fácil ver que cualquiera de las conectivas elementales puede expresarse en términos de estas dos.

EJEMPLO 3 Expresar el bicondicional usando solamente la negación y la disyunción.

Solución

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ (Ley del bicondicional)

$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$ (Ley del condicional)

$\equiv \sim[\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)]$ (Leyes de De Morgan y de doble negación)

En la tarea de expresar las conectivas en términos de las otras, podemos ir más lejos aún. Todas las conectivas lógicas elementales pueden expresarse en términos de una sola conectiva (ver el problema resuelto 7 y el problema propuesto 13 de esta sección).

PRUEBAS DEDUCTIVAS

Veamos como podemos usar las leyes de los dos cuadros anteriores para probar otras equivalencias. Una prueba de este tipo la llamaremos **prueba deductiva**.

EJEMPLO 4 Probar deductivamente la **ley de reducción al absurdo**:

$$(p \to q) \equiv (p \wedge \sim q \to \mathbf{0})$$

Solución

$(p \wedge \sim q \to \mathbf{0}) \equiv \sim(p \wedge \sim q) \vee \mathbf{0}$ (Ley del condicional)

$\equiv \sim(p \wedge \sim q)$ (Ley de identidad)

$\equiv \sim p \vee q$ (Ley de De Morgan)

$\equiv p \to q$ (Ley de condicional)

EJEMPLO 5 Probar deductivamente la **ley de exportación**:

$$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

Solución

$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv \sim(p \wedge q) \vee r$	(Ley del condicional)
$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r$	(Ley de De Morgan 9b)
$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r)$	(Ley asociativa 2a)
$\equiv \sim p \vee (q \rightarrow r)$	(Ley del condicional)
$\equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$	(Ley del condicional)

EJEMPLO 6 Probar deductivamente la **ley de absorción**:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

Solución.

$p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge \mathbf{1}) \vee (p \wedge q)$	(Ley de identidad 5b)
$\equiv p \wedge (\mathbf{1} \vee q)$	(Ley distributiva 4b)
$\equiv p \wedge \mathbf{1}$	(Ley de dominación 6a)
$\equiv p$	(Ley de identidad 5b)

OBSERVACION. Es evidente que cualquier forma proposicional que es equivalente a una tautología o a una contradicción, es, a su vez, una tautología o una contradicción, respectivamente. De acuerdo a esta observación, las leyes de complementación:

$$p \vee \sim p \equiv \mathbf{1} \quad \text{y} \quad p \wedge \sim p \equiv \mathbf{0},$$

no son sino formas abreviadas de decir que $p \vee \sim p$ es una tautología y que $p \wedge \sim p$ es una contradicción.

EJEMPLO 7 Probar que la siguiente expresión es una tautología.

$$\sim p \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$$

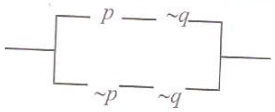
Solución

$\sim p \rightarrow (q \rightarrow \sim p) \equiv \sim(\sim p) \vee (\sim q \vee \sim p)$	(Ley del condicional)
$\equiv p \vee (\sim q \vee \sim p)$	(Ley de doble negación)
$\equiv p \vee (\sim p \vee \sim q)$	(Ley conmutativa)
$\equiv (p \vee \sim p) \vee \sim q$	(Ley asociativa)
$\equiv \mathbf{1} \vee \sim q$	(Ley del tercio excluido)
$\equiv \mathbf{1}$	(Leyes conm. y de domin.)

Por ser $\sim p \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$ equivalente a una tautología, ella misma es una tautología.

Ahora usaremos el álgebra de proposiciones para simplificar circuitos. Esto es, dado un circuito, hallar otro más simple que cumpla la misma función que el dado.

EJEMPLO 8 Simplificar el siguiente circuito.



Solución

A este circuito le corresponde la forma proposicional:

$$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

Simplificamos esta expresión usando las leyes del algebra proposicional:

$$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv (p \vee \sim p) \wedge \sim q \qquad \text{(Ley distributiva)}$$

$$\equiv \mathbf{1} \wedge \sim q \qquad \text{(Ley del tercio excluido)}$$

$$\equiv \sim q \qquad \text{(Ley de identidad)}$$

Luego, el circuito dado puede ser reemplazado por el siguiente circuito más simple:

PROBLEMAS RESUELTOS 1.4

PROBLEMA 1 Probar que la equivalencia lógica es:

a. **Reflexiva**. Esto es, $A \equiv A, \forall A$

b. **Simétrica**. Esto es, si $A \equiv B$ entonces $B \equiv A$

c. **Transitiva**. Esto es, si $A \equiv B$ y $B \equiv C$, entonces $A \equiv C$

Solución

a. A tiene los mismos valores lógicos que A

b. Como $A \equiv B$, A y B tienen los mismos valores lógicos. Luego B y A tienen también los mismos valores lógicos y, por tanto, $B \equiv A$.

c. Como $A \equiv B$, A y B tienen los mismos valores lógicos.
Por otro lado, como $B \equiv C$, B y C tienen los mismos valores lógicos. En consecuencia A y C tienen los mismos valores lógicos y, por tanto, $A \equiv C$.

PROBLEMA 2 Probar deductivamente que

$$p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$$

Solución

$p \veebar q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$	(Ley de la disyun. Excl.)
$\equiv [(p \wedge \sim q) \vee q] \wedge [(p \wedge \sim q) \vee \sim p]$	(Ley distributiva)
$\equiv [(p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)] \wedge [(p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee \sim p)]$	(Ley distributiva)
$\equiv [(p \vee q) \wedge \mathbf{1}] \wedge [\mathbf{1} \wedge (\sim q \vee \sim p)]$	(Ley del tercio excluido)
$\equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$	(Ley de identidad)
$\equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$	(Ley conmutativa)
$\equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$	(Ley de De Morgan)

PROBLEMA 3 Probar que $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ es una tautología.

Solución

$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p \equiv \sim[(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \vee \sim p$	(Ley del condicional)
$\equiv \sim[(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)] \vee \sim p$	(Ley distributiva)
$\equiv \sim[(\sim p \wedge \sim q) \vee \mathbf{0}] \vee \sim p$	(Ley de contradicción)
$\equiv \sim[(\sim p \wedge \sim q)] \vee \sim p$	(Ley de identidad)
$\equiv (p \vee q) \vee \sim p$	(Ley de De Morgan)
$\equiv (p \vee \sim p) \vee q$	(Leyes conm. y asociat.)
$\equiv \mathbf{1} \vee q$	(ley del tercio excluido)
$\equiv \mathbf{1}$	(ley de identidad)

Luego, por ser $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ equivalente a una tautología, concluimos que ella misma es también una tautología. Esta ley lógica tiene su propio nombre: Se llama **Modus Tollendo Tollens,** a la cual la volveremos a encontrar más adelante.

PROBLEMA 4 Probar que la siguiente expresión es una contradicción

$$p \wedge \sim(q \vee p)$$

Solución

$$
\begin{aligned}
p \wedge \sim(q \vee p) &\equiv p \wedge (\sim q \wedge \sim p) && \text{(Ley de De Morgan)}\\
&\equiv (p \wedge \sim q) \wedge \sim p && \text{(Ley asociativa)}\\
&\equiv (\sim q \wedge p) \wedge \sim p && \text{(Ley conmutativa)}\\
&\equiv \sim q \wedge (p \wedge \sim p) && \text{(Ley asociativa)}\\
&\equiv \sim q \wedge \mathbf{0} && \text{(Ley de contradicción)}\\
&\equiv \mathbf{0} && \text{(Ley de dominación)}
\end{aligned}
$$

Luego, $p \wedge \sim(q \vee p)$ es una contradicción.

PROBLEMA 5. Probar la equivalencia: $(\sim p \vee q) \vee (p \rightarrow r) \equiv (\sim q \wedge \sim r) \rightarrow \sim p$

Solución

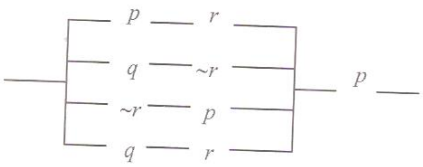
$$
\begin{aligned}
(\sim p \vee q) \vee (p \rightarrow r) &\equiv (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r) && \text{(Ley del condicional)}\\
&\equiv (q \vee r) \vee (\sim p \vee \sim p) && \text{(Leyes asociativa y conmutativa)}\\
&\equiv (q \vee r) \vee \sim p && \text{(Idempotencia)}\\
&\equiv \sim (q \vee r) \rightarrow \sim p && \text{(Ley del condicional)}\\
&\equiv (\sim q \wedge \sim r) \rightarrow \sim p && \text{(Ley de De Morgan)}
\end{aligned}
$$

PROBLEMA 6 Probar la equivalencia: $(p \vee \sim q) \rightarrow \sim(p \wedge r \rightarrow \sim q) \equiv q \wedge (p \rightarrow r)$

Solución

$$
\begin{aligned}
(p \vee \sim q) \rightarrow \sim(p \wedge r \rightarrow \sim q) &\equiv \sim(p \vee \sim q) \vee \sim[\sim(p \wedge r) \vee \sim q] && \text{(Ley del condicional)}\\
&\equiv (\sim p \wedge q) \vee [(p \wedge r) \wedge q] && \text{(Ley de De Morgan)}\\
&\equiv (q \wedge \sim p) \vee [q \wedge (p \wedge r)] && \text{(Ley conmutativa)}\\
&\equiv q \wedge [\sim p \vee (p \wedge r)] && \text{(Ley distributiva)}\\
&\equiv q \wedge [(\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee r)] && \text{(Ley distributiva)}\\
&\equiv q \wedge [\mathbf{1} \wedge (\sim p \vee r)] && \text{(Ley del tercio excluido)}\\
&\equiv q \wedge [(\sim p \vee r)] && \text{(Ley de identidad)}\\
&\equiv q \wedge (p \rightarrow r) && \text{(Ley del condicional)}
\end{aligned}
$$

PROBLEMA 7 Simplifique el siguiente circuito:



Solución

Trabajamos con su forma proposicional

$\{(p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r) \vee (\sim r \wedge p) \vee (q \wedge r)\} \wedge p$

$\equiv \{(p \wedge r) \vee (\sim r \wedge p) \vee (q \wedge \sim r) \vee \ \vee (q \wedge r)\} \wedge p$ (Ley conmutativa)

$\equiv \{[(p \wedge r) \vee (\sim r \wedge p)] \vee [(q \wedge \sim r) \vee (q \wedge r)]\} \wedge p$ (Ley asociativa)

$\equiv \{[p \wedge (r \vee \sim r)] \vee [q \wedge (\sim r) \vee r)]\} \wedge p$ (Ley distributiva)

$\equiv \{[p \wedge \mathbf{1}] \vee [q \wedge \mathbf{1}\} \wedge p$ (Ley del tercio excluido)

$\equiv \{p \vee q\} \wedge p$ (Ley de identidad)

$\equiv \{p \vee q\} \wedge p$ (Ley conmutativa)

$\equiv p$ (Ley de absorción)

El circuito dado puede reemplazarse por el circuito

—— p ——

PROBLEMA 8. Se llama **binegación** a la conectiva denotada $\downarrow$ y definida por

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Esta tabla también corresponde a la forma $(\sim p) \wedge (\sim q)$. Luego,

$$\boldsymbol{p \downarrow q \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)}$$

Por esta razón, a $p \downarrow q$ también se la llama **ni p ni q**

Expresar los conectivos elementales únicamente usando $\downarrow$. En términos más precisos, probar que:

1. $\sim p \equiv p \downarrow p$ **2.** $p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

3. $p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ **4.** $p \rightarrow q \equiv [(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]$

5. $p \rightarrow q \equiv \alpha \downarrow \beta$, donde

$$\alpha = \{[(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]\} \downarrow \{[(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]\}$$

$$\beta = \{[(q \downarrow q) \downarrow p] \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow p]\} \downarrow \{[(q \downarrow q) \downarrow p] \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow p]\}$$

Solución

1. $\sim p \equiv (\sim p) \wedge (\sim p)$ (Ley de idempotencia)

$\equiv p \downarrow p$ (Definición de $\downarrow$)

2. $p \wedge q \equiv \sim(\sim p) \wedge \sim(\sim q)$ (Doble negación)

$\equiv (\sim p) \downarrow (\sim p)$ (Definición de $\downarrow$)

$\equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$ (Por 1)

3. $p \vee q \equiv \sim(\sim p) \vee \sim(\sim q)$ (Doble negación)

$\equiv \sim[(\sim p) \wedge \sim(\sim q)]$ (De Morgan)

$\equiv \sim[p \downarrow q)]$ (Definición de $\downarrow$)

$\equiv [p \downarrow q)] \downarrow [p \downarrow q)]$ (Por 1)

4. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ (Ley del condicional)

$\equiv (p \downarrow q) \vee q$ (Por 1)

$\equiv [(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]$ (Por 3)

5. $p \rightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (Ley del bicondicional)

$\equiv [(p \rightarrow q) \downarrow (p \rightarrow q)] \downarrow [(q \rightarrow p) \downarrow (q \rightarrow p)]$ (Por 2)

$\equiv \alpha \downarrow \beta$, donde, por 4,

$$\alpha = \{[(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]\} \downarrow \{[(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]\}$$

$$\beta = \{[(q \downarrow q) \downarrow p] \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow p]\} \downarrow \{[(q \downarrow q) \downarrow p] \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow p]\}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.4

1. Probar, mediante tablas de verdad, algunas de las leyes del álgebra de proposiciones.

2. Probar, mediante tablas de verdad, algunas de las leyes del cuadro "Otras Equivalencias Notables"

3. Probar que:

   a. $\sim(0 \wedge \sim 1) \equiv 1$ b. $0 \rightarrow 1 \equiv 1$ c. $(1 \vee 0) \wedge (\sim 0 \vee 1) \equiv 1$

4. Probar, deductivamente, la **ley del contrarrecíproco**:

$$(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$$

5. Probar, deductivamente, la **ley de absorción**:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

6. Probar, deductivamente, la **ley de demostración por casos**:

$$(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

7. Probar, deductivamente, que:

   a. $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
   b. $p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
   c. $p \leftrightarrow q \equiv \sim(p \veebar q)$

8. Probar, deductivamente, que:

   a. $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \equiv (p \wedge q \rightarrow r \vee s)$

   b. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q \rightarrow r)$

   c. $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow \sim q \vee r)$

   d. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q \wedge r)$

   e. $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q \vee r)$

9. Probar, deductivamente, que:

   a. $(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim t \rightarrow p) \equiv (\sim p \rightarrow q) \vee (\sim t \rightarrow q)$

   b. $(\sim p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow \sim p) \equiv (p \rightarrow \sim q) \vee (r \rightarrow \sim q)$

   c. $(\sim p \wedge \sim r) \rightarrow \sim (p \wedge q) \equiv p \rightarrow (q \rightarrow p \vee r)$

   d. $(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim r) \equiv (\sim p \rightarrow \sim r) \vee (\sim q \rightarrow \sim r)$

   e. $(p \vee \sim q) \rightarrow (r \rightarrow p) \equiv (r \rightarrow q) \vee (r \rightarrow p)$

   f. $(\sim p \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow \sim r) \equiv (q \rightarrow p) \vee (r \rightarrow p)$

g. $(\sim p \to q) \to (\sim q \to \sim r) \equiv (p \to q) \vee (p \to \sim r)$

h. $(\sim p \to q) \to (q \wedge \sim r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to \sim r) \wedge (q \to \sim r)$

i. $(p \to \sim q) \to (q \to \sim t) \equiv (\sim p \to \sim q) \vee (\sim p \to \sim t)$

j. $(\sim r \wedge q) \to \sim(q \to p) \equiv (p \wedge q) \to r$

r. $(\sim q \to \sim p) \to \sim(r \wedge p) \equiv r \to \sim(p \wedge q)$

10. Expresar todas los conectivos lógicos elementales usando sólo $\sim$, $\vee$.

11. Expresar todos los conectivos lógicos elementales usando sólo $\sim$, $\to$.

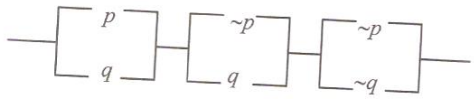
12. Usando sólo la conectiva $\downarrow$, expresar la conectiva $\underline{\vee}$.

13. Se define la **barra de Sheffer** "|" del modo siguiente: $\boldsymbol{p \mid q \equiv (\sim p) \vee (\sim q)}$
Escribir, en términos de esta conectiva, cada una de las siguientes expresiones:
a. $\sim p$ **b.** $p \wedge q$ **c.** $p \vee q$ **d.** $p \to q$ **e.** $p \leftrightarrow q$ **f.** $p \underline{\vee} q$

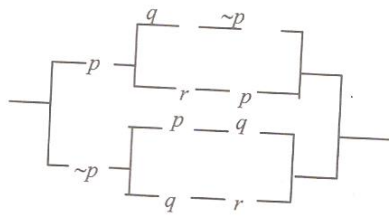
14. Simplificar cada una de las siguientes expresiones:
a. $\sim p \wedge (p \vee q)$ **b.** $(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (p \vee q)$
c. $(p \to q) \wedge (p \to \sim q)$ **d.** $\{[(p \vee (q \wedge r)) \vee \sim p] \wedge \sim q\} \vee (q \wedge \sim r)$

15. Simplifica los siguientes circuitos:

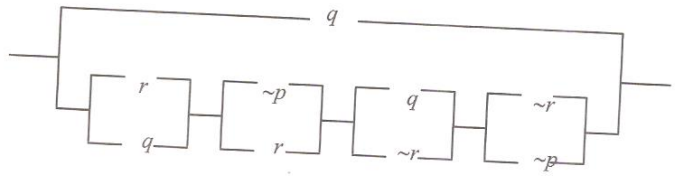
a.



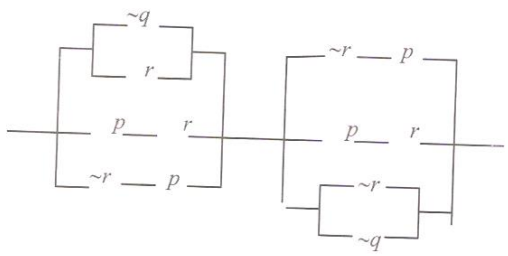
b.



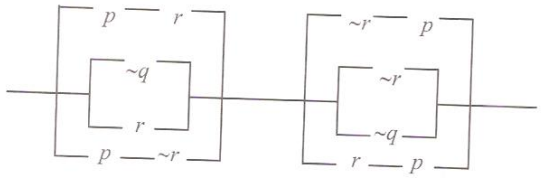
c.



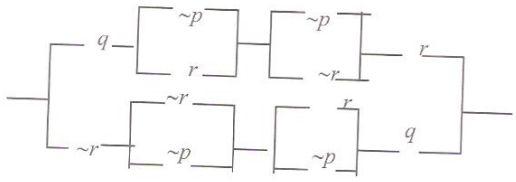
d.


~q
r
p
r
~r
p
~r
p
p
r
~r
~q

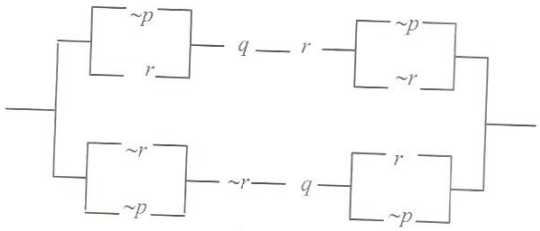
e.


p
r
~q
r
p
~r
~r
p
~r
~q
r
p

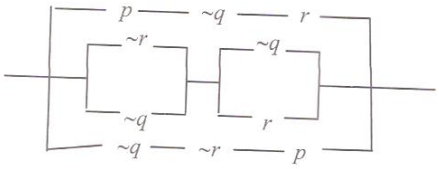
f.


q
~p
r
~p
~r
r
~r
~r
~p
r
~p
q

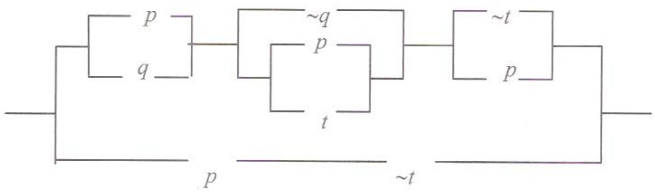
g.


~p
r
q
r
~p
~r
~r
~p
~r
q
r
~p

h.


p
~q
r
~r
~q
~q
r
~q
~r
p

i.



16. Diseñar un circuito eléctrico para tu dormitorio, que tenga dos interruptores, uno en la entrada y otro en la cabecera de la cama, de modo que cualquiera de ellos encienda la luz si está apagada, y que apague, si está encendida.

17. El jurado de un concurso de belleza está integrado por tres miembros, diseñar un circuito, de manera que se encienda la luz para indicar una mayoría de votos a favor. Cada miembro del jurado presiona un botón para indicar su voto a favor y no presiona para un voto en contra.

DESARROLLO DECIMAL DE π

El número π *es la razón constante entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro. Este es un número* ***irracional****. Es decir, no es el cociente de dos enteros y, por tanto, su expansión decimal es* ***infinita*** *y* ***no periódica****. Desde hace 25 siglos ha tenido un gran poder de seducción. Le ha dedicado poemas, películas y muchos tatuajes. Se ha establecido el* ***14 de marzo como el dia de π.***

Siempre ha sido fascinación para muchos matemáticos calcular tantos dígitos de π como sea posible. Nos cuenta C. Pickover, en su interesante obra " Keys to Infinity" que los griegos conocieron a π sólo con 3 dígitos. En 1.579, el matemático francés ***François Viète*** *(1.540–1.603) computó los 10 primeros dígitos (3,141592653).*

En 1.844, ***Johann Martin Zacharias Dase*** *(1.824–1.861), usando series y alrededor de dos meses de trabajo duro, calculó 200 dígitos.*

En 1.989, ***los hermanos Chudnovsky****, dos matemáticos de la* ***Universidad de Columbia*** *(Nueva York), usando una computadora Cray 2 y una IBM 3090-VF,*

calcularon 1.011.196.691 dígitos, de los cuales se dice que impresos, al tamaño de estas letras, alcanzarían la longitud de 1.580 millas. En 1.991, estos dos matemáticos ya habían calculado más de dos billones de dígitos.

*En el 2.009, **Fabrice Bellard**, un programador de computación francés, calculó 2.699.999.990.000 cifras decimales.*

*En octubre del 2.011, **Shigeru Kondo**, un ingeniero de sistemas japonés, calculó 10.000.000.000.050 cifras decimales y en diciembre del 2.013 batió su propio record, calculando 12.100.000.000.060 cifras.*

Fabrice Bellard

Shigeru Kondo

Para usos prácticos no se requiere mucha exactitud de π. Así, sólo se requieren 39 decimales de π para computar la longitud de la circunferencia del universo conocido, con un error no mayor que el radio de un átomo de hidrógeno.

El siguiente párrafo fue tomado de 9GAG, un portal humorístico de Internet. Este nos ilústrale significado del desarrollo infinito no periódico de la expresión decimal de π, o, en general, de cualquier número irracional.

$$\pi$$

Es un decimal de infinitas cifras que no se repiten. Esto significa que cualquier combinación de números existe en algún lugar del desarrollo de π. Si a estas combinaciones las traducimos a código ASCII (Código Standard Americano para Intercambio de información, que traduce el alfabeto inglés e términos de cifras numéricas del 0 al 9), entonces en algún lugar del desarrollo decimal está el nombre de la persona que has amado, amas o amarás; está la fecha, la hora y la causa de muerte y está la respuesta a todas las grades interrogaciones acerca del universo.

...dos que impresos, al tamaño de ... millas. En 1.991, estos dos ... de dígitos.

...de computación francés, calculó

...de sistemas japonés, calculó ...del 2.013 batió su propio

Shigeru Kondo

...ad de π. Así, sólo se requieren ...la circunferencia del universo ...átomo de hidrógeno.

...al humorístico de Internet. Este ...ódico de la expresión decimal

...m. Esto significa que cualquier ...del desarrollo de π. Si a estas ...digo Standard Americano para ...to inglés e términos de cifras ...del desarrollo decimal está el ...más; está la fecha, la hora y la ...des interrogaciones acerca del

2

INFERENCIA LOGICA

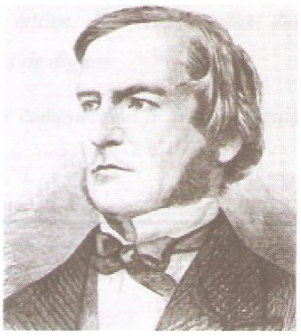
GEORGE BOOLE
(1815-1864)

2.1 IMPLICACION E INFERENCIA

2.2 METODOS DE DEMOSTRACION

EL DESCUBRIMIENTO DE LOS IRRACIONALES.
UNA HISTORIA TRAGICA

GEORGE BOOLE
(1815-1864)



GEORGE BOOLE *nació en Lincoln, Inglaterra, en noviembre del año 1.815. Representando a las proposiciones con variables y definiendo operaciones con ellas, a la lógica le dio una estructura de álgebra. Se inició así una innovación en esta disciplina, que logró alejarla del lado de la filosofía y la colocó al lado de la matemática. La nueva estructura matemática creada por Boole se conoce actualmente con el nombre de álgebra de Boole, la cual es básica para el diseño de los circuitos de las computadoras digitales.*

Su padre fue un modesto comerciante. Desde muy temprana edad tuvo que trabajar dando clases. Su educación, prácticamente, fue responsabilidad de él mismo. Sin duda, fue un distinguido autodidacta. A la edad de 12 años aprendió Griego y Latín. A los 20 años ya leía las difíciles y profundas obras científicas de ese tiempo, como ***Principia*** *de Newton,* ***Mécanique Analytique*** *de Lagrange y* ***Mécanique Céleste*** *de Laplace. En 1.848 y en 1.854 publica sus dos obras fundamentales,* ***Mathematical Analysis of Logic*** *y* ***Law of Logic****. Estos trabajos despertaron gran admiración. Entre sus admiradores estuvo otro lógico inglés,* ***Augusto De Morgan.***

ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

En el año que nace Boole (1.815) se dio la batalla de Waterloo, en la que los ingleses vencen definitivamente a Napoleón. Durante la niñez de George tuvo lugar casi toda la gesta independentista de ***Simón Bolívar*** *y* ***José de San Martín*** *, para liberar a la América Hispana. Mientras transcurrían sus últimos años, Venezuela sufrió el fragor de la Guerra Federal (1.859-1.863) y Estados Unidos, él de la Guerra Civil (1.861- 1.865). Otros hechos importantes acaecidos durante la vida de Boole son: Se inventaron el ferrocarril (1830), el motor eléctrico (1.831), el teléfono (1.833), la cámara fotográfica (1.839) y el submarino (1.850). Se publicaron:: Viaje a las Regiones Equinocciales de Humboldt (1.834),* ***El Manifiesto del Partido Comunista*** *de Marx y Engel, (1.848) y* ***El Origen de las Especies*** *de Darwin. Muere (1.864) cuando gobernaba Venezuela el general Juan Crisótomo Falcón.*

SECCION 2.1
IMPLICACION E INFERENCIA

IMPLICACION LOGICA

DEFINICION. Sean A y B dos formas proposicionales. Diremos que A **implica lógicamente a** B, o simplemente que A **implica a** B, y escribiremos

$$\mathbf{A \Rightarrow B,}$$

si y solamente si la forma **condicional** $A \to B$ **es una tautología.**

Veamos el concepto de implicación lógica desde otro punto de vista. Observando la tabla de verdad del condicional $A \to B$ vemos que, para que esta sea una tautología, la segunda fila de la tabla no debe suceder:

A	$\to$	B
1	**1**	1
~~1~~	~~**0**~~	~~0~~
0	**1**	1
0	**1**	0

O sea, no debe darse el caso de que A sea verdadera y B sea falsa. En otras palabras, en vista de que el condicional es siempre verdadero cuando A es falso, sólo debemos verificar que cada vez que A es verdadera, B también lo es (primera fila). Adoptando este punto de vista, la implicación lógica también puede formularse del modo siguiente:

DEFINICION Sean A y B dos formas proposicionales. Diremos que A **implica lógicamente a** B, si y sólo si cada asignación de valores lógicos que hace a A verdadera, también hace a B verdadera.

Cualquiera de las definiciones anteriores será usada libremente, según convenga.

EJEMPLO 1. **a.** Probar que $p \wedge q$ implica lógicamente a p. O sea,

$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

b. Probar que p implica lógicamente a $p \vee q$. o sea,

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

c. Probar que $p \underline{\vee} q \Rightarrow p \vee q$.

Solución

Las siguientes tablas dicen $(p \wedge q) \to p$, $p \to (p \vee q)$ y $p \underline{\vee} q \to p \vee q$ son tautologías.

a.

$(p \wedge q)$	$\rightarrow$	p
1 1 1	**1**	1
1 0 0	**1**	1
0 0 1	**1**	0
0 0 0	**1**	0

b.

p	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
1	**1**	1 1 1
1	**1**	1 1 0
0	**1**	0 1 1
0	**1**	0 0 0

c.

$p \underline{\vee} q$	$\rightarrow$	$p \vee q$
1 0 1	**1**	1 1 0
1 1 0	**1**	1 1 0
0 1 1	**1**	0 1 0
0 0 0	**1**	0 0 0

A la primera tautología se la llama **ley de simplificación** y a la segunda, **ley de la adición**.

EJEMPLO 2 Probar la siguiente ley, llamada **modus ponendo ponens**,

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

Solución

$$\begin{aligned}
[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q &\equiv \sim[(\sim p \vee q) \wedge p] \vee q && \text{(Ley del condicional)}\\
&\equiv [\sim(\sim p \vee q) \vee \sim p] \vee q && \text{(Ley de De Morgan)}\\
&\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee [\sim p \vee q] && \text{(Ley asociativa)}\\
&\equiv \mathbf{1} && \text{(Ley del tercio excluido)}
\end{aligned}$$

Luego, $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$, por ser equivalente a una tautología, es también una tautología. Esto es, $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$.

INFERENCIA LOGICA

La teoría de la **inferencia lógica**, llamada también **teoría de la deducción**, **teoría de la demostración** o **teoría del razonamiento correcto**, constituye una de las partes más importantes de la lógica. Su aplicabilidad se manifiesta no sólo en las ciencias exactas, como la matemática, sino en muchos otros ámbitos, como la filosofía, el derecho y, en general, en la vida diaria.

Razonamientos Válidos

Un **razonamiento** o una **inferencia** es la aseveración de que una proposición, llamada **conclusión**, es consecuencia de otras proposiciones dadas, llamadas **premisas**. Si un razonamiento tiene como premisas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ y como conclusión C, entonces a éste lo representaremos así:

$$\begin{array}{c}
P_1\\
P_2\\
\cdot\\
\cdot\\
P_n\\
\hline
C
\end{array}$$

c. $p \underline{\vee} q \rightarrow p \vee q$

1	0	1	**1**	1	1	0
1	1	0	**1**	1	1	0
0	1	1	**1**	0	1	0
0	0	0	**1**	0	0	0

ificación y a la segunda, **ley de la**

---

ponendo ponens,

(Ley del condicional)

(Ley de De Morgan)

(Ley asociativa)

(Ley del tercio excluido)

una tautología, es también una

ICA

teoría de la deducción, teoría
orrecto, constituye una de las
ual se manifiesta no sólo en las
uchos otros ámbitos, como la

dos

ación de que una proposición,
proposiciones dadas, llamadas
as $P_1, P_2, \ldots, P_n$ y como

EJEMPLO 3 La siguiente secuencia de proposiciones es un razonamiento:

Si hoy es sábado, entonces mañana es domingo.

Si hoy es martes, entonces mañana no es domingo.

Hoy es martes.

Luego, hoy no es sábado.

Este razonamiento se escribe simbólicamente así:

Premisa 1:	$s \rightarrow d$	donde	s : hoy es sábado
Premisa 2:	$m \rightarrow \sim d$		d : mañana es domingo
Premisa 3 :	m		m : hoy es martes
Conclusión:	$\sim s$		

Los razonamientos en los que estamos interesados son aquellos que de premisas verdaderas se deriven conclusiones verdaderas. Estos son los razonamientos correctos o **razonamientos válidos**.

DEFINICION Diremos que un **razonamiento** es **válido** o es **correcto** si y sólo sí la conjunción de las premisas implica lógicamente a la conclusión. Es decir, un razonamiento

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \\ \hline C \end{array}$$

es correcto si y sólo si $\boldsymbol{P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow C}$ **es una tautología**.

O sea, si y sólo si $\boldsymbol{P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C}$.

EJEMPLO 4 El razonamiento del ejemplo anterior es válido:

$$\begin{array}{c} s \rightarrow d \\ m \rightarrow \sim d \\ m \\ \hline \sim s \end{array}$$

En efecto, construyendo la tabla condicional:

$[(s \to d)$	$\wedge$	$(m$	$\to$	$\sim d)]$	$\wedge$	m	$\to$	$\sim s$
1	1	1	0	1	0	0	0 1 **1**	0
1	1	1	1	0	1	0	0 0 **1**	0
1	0	0	0	1	1	1	0 1 **1**	0
1	0	0	0	0	1	1	0 0 **1**	0
0	1	1	0	1	0	0	0 1 **1**	1
0	1	1	1	0	1	0	0 0 **1**	1
0	1	0	1	1	1	1	1 1 **1**	1
0	1	0	1	0	1	1	0 0 **1**	1

Vemos que $[(s \to d) \wedge (m \to \sim d)] \wedge m \to \sim s$ es una tautología. Luego, el razonamiento es válido.

Para indicar que un razonamiento es válido se usan también las expresiones:

a. La conclusión es una **consecuencia lógica** de las premisas.

b. La conclusión **sigue lógicamente** las premisas.

c. Las premisas **implican** la conclusión.

A un razonamiento que no es válido lo llamaremos **falacia**.

EJEMPLO 5 Una falacia muy común es la de **afirmar el consecuente**:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q} \\ p \end{array}$$

$[(p \to q)$	$\wedge$	$q]$	$\to$	p
1	1	1	1 **1**	1
1	0	0	0 **1**	1
0	1	1	1 **0**	0
0	1	0	0 **1**	0

La tabla dice que $[(p \to q) \wedge q] \to p$ no es una tautología. Luego, el razonamiento no es correcto y, por tanto, es una falacia.

Como caso particular de esta falacia tenemos:

1. Si Sucre nació en Caracas, entonces Sucre es venezolano.
2. Sucre es venezolano.

Sucre nació en Caracas

$$\begin{array}{l} s \to v \\ \underline{v} \\ s \end{array}$$

Vemos que, aunque las premisas son verdaderas, la conclusión es falsa. Es decir, de premisas verdaderas se ha derivado una conclusión falsa.

Cuando el razonamiento tiene varias variables, La prueba de su validez mediante la construcción de su tabla de verdad, resulta laborioso e impráctico. Así, si un razonamiento tiene 6 variables, su tabla tiene $2^6 = 64$ filas. Para obviar esta dificultad, contamos con otro método, que lo llamaremos **Método Deductivo**. Este otro método resulta ser más elegante y, en general, más sencillo que el método de tabla. Debemos confesar que la razón de ser de este capítulo es, precisamente, la exposición de este método deductivo. En resumen, el método consiste en dividir el razonamiento en una secuencia de razonamientos cortos, simples y que de antemano sabemos que son válidos. A estos los llamaremos **Razonamientos Elementales o Reglas de Inferencia**. Aquí los tenemos:

REGLAS DE INFERENCIA

1. Modus Ponendo Ponens

$(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \quad\quad} \\ q \end{array}$$

2. Modus Tollendo Tollens

$(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\sim q \quad\quad} \\ \sim p \end{array}$$

3. Silogismo Disyuntivo

$(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$

$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim q \quad\quad} \\ p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim p \quad\quad} \\ q \end{array}$$

5. Ley de simplificación

$p \wedge q \Rightarrow p$

$p \wedge q \Rightarrow q$

$$\begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ p \end{array} \qquad \begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ q \end{array}$$

4. Silogismo Hipotético

$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r \quad\quad} \\ p \to r \end{array}$$

6. Ley de la Adición

$p \Rightarrow p \vee q$

$q \Rightarrow p \vee q$

$$\begin{array}{l} \underline{p \quad\quad} \\ p \vee q \end{array} \qquad \begin{array}{l} \underline{q \quad\quad} \\ p \vee q \end{array}$$

7. Ley de la Conjunción

$(p) \wedge (q) \Rightarrow (p \wedge q)$

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q \quad\quad} \\ p \wedge q \end{array}$$

El estudiante debe probar que todas estas formas proposicionales son, efectivamente, implicaciones y, por tanto, razonamientos válidos. Para esto se procede como se hizo con el modus ponendo ponens (ejemplo 3) y el modus tollendo tollens (problema resuelto 3 de la sección 1.4).

Las dos primeras reglas tienen su nombre tomados del Latín. El **Modus** (método) **ponendo ponens**, $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$, nos dice que afirmando (ponendo) el antecedente de un condicional se puede afirmar (ponens) el consecuente. El **Modus tollendo tollens**, $(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$, nos dice que negando (tollendo) el consecuente de un condicional se puede negar (tollens) el antecedente.

EJEMPLO 6 Considerar el siguiente razonamiento:

Si llueve, entonces el suelo está mojado.

Llueve.

Luego, el suelo está mojado.

Simbólicamente:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ q \end{array} \qquad \text{donde} \quad \begin{array}{l} p\text{: llueve} \\ q\text{: el suelo está mojado} \end{array}$$

La regla de inferencia modus ponendo ponens nos asegura que este razonamiento es válido.

EJEMPLO 7 Ahora consideramos este otro razonamiento, que tiene las mismas proposiciones atómicas que el ejemplo anterior:

Si llueve, entonces el suelo está mojado
El suelo no está mojado
Luego, no llueve

Simbólicamente:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\sim q \qquad} \\ \sim p \end{array}$$

La regla de inferencia modus tollendo tollens nos asegura que este razonamiento también es válido.

OBSERVACION. Hacemos notar al lector que un razonamiento correcto no necesariamente tiene que tener una conclusión verdadera. Este resultado no nos parecerá extraño si tenemos presente que la corrección de un razonamiento está dada por la implicación: $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$. Esta implicación sólo nos asegura que C es verdadera si $P_1, P_2, \ldots,$ y P_n son verdaderas; pero no nos dice nada del valor lógico de C si alguna de las premisas es falsa.

EJEMPLO 8 Considerar el siguiente razonamiento:

Si el animal vuela, entonces el animal tiene alas

Si el animal tiene alas, entonces el animal es un pájaro

Luego, si el animal vuela, entonces el animal es un pájaro.

Simbólicamente:

$$\begin{array}{l} v \rightarrow a \\ \underline{a \rightarrow p} \\ v \rightarrow p \end{array} \qquad \text{donde} \qquad \begin{array}{l} v\text{: el animal vuela} \\ a\text{: el animal tiene alas} \\ p\text{: el animal es un pájaro} \end{array}$$

La regla del silogismo hipotético nos dice que este razonamiento es válido. Sin embargo, su conclusión es una proposición falsa (la abeja vuela y no es un pájaro). El lector no se sentirá incómodo si observa que la segunda premisa es falsa.

Ahora, usaremos las reglas de inferencia, y algunas de las leyes dadas en el capítulo anterior, para probar la validez de razonamientos más complejos.

EJEMPLO 9 Demostrar deductivamente (sin tablas de verdad) que el razonamiento del ejemplo 4 es válido:

$$\begin{array}{l} s \rightarrow d \\ m \rightarrow \sim d \\ m \\ \hline \sim s \end{array}$$

Demostración

1.	$s \rightarrow$ d	Premisa 1
2.	$m \rightarrow \sim d$	Premisa 2
3.	m	Premisa 3
4.	$\sim d$	De 2 y 3, por modus ponendo ponens
5.	~s	De 1 y 4, por modus tollendo tollens

Hemos probado que el razonamiento dado es correcto.

DEFINICION. Una **demostración** o **prueba formal** de validez de un razonamiento es una secuencia de proposiciones que termina con la conclusión. Cada una de las proposiciones es una premisa o una consecuencia lógica de las proposiciones anteriores.

EJEMPLO 10 Demostrar la validez del siguiente razonamiento:

Si me gradúo y encuentro un trabajo, entonces ganaré dinero. Si gano dinero, entonces ayudaré a mi familia. No ayudo a mi familia. Por lo tanto, no me gradué o no encontré trabajo.

Solución

Simbolizamos el razonamiento:

1.	$g \wedge t \rightarrow d$	donde	g: me gradúo
2.	$d \rightarrow f$		t: encuentro un trabajo
3.	$\underline{\sim f}$		d: ganaré dinero
	$\sim g \vee \sim t$		f: ayudaré a mi familia

Demostración.

4.	$\sim d$	De 2 y 3, por modus tollendo tollens
5.	$\sim(g \wedge t)$	De 1 y 4, por modus tollendo tollens
6.	$\sim g \vee \sim t$	De 5, por ley de De Morgan.

PRUEBA POR CASOS

Si una de las premisas es una **disyunción**, se puede proceder a **probar por casos**. Esta consiste en trabajar independientemente con cada uno de los términos de la disyunción y llegar a la misma conclusión. Este método se basa en la **ley de demostración por casos**:

$$[(p \vee q) \rightarrow r] \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

Este método también es válido si una de las premisas es una **disyunción exclusiva**. Esta situación se fundamenta en la implicación:

$$p \underline{\vee} q \Rightarrow p \vee q,$$

probada en el ejemplo1, y en la ley de demostración por casos.

EJEMPLO 11 Demuestra la validez del siguiente razonamiento:

Si vamos a Margarita, entonces gastaremos mucho dinero. Si vamos al páramo, sufriremos por el frío. Pero, vamos a Margarita o vamos al páramo. Por consiguiente, gastaremos dinero o sufriremos por el frío.

Solución

Simbolizamos el razonamiento:

1.	$m \rightarrow g$	donde	m: vamos a Margarita
2.	$p \rightarrow f$		g: gastaremos mucho dinero
3.	$\underline{m \vee p}$		p: vamos al páramo
	$g \vee f$		f: sufriremos por el frío.

Demostración.

4. m	Caso 1 en 3.
5. g	De 1 y 4, por modus ponendo ponens.
6. $g \vee f$	De 5, por ley de adición.
7. p	Caso 2 en 3
8. f	De 2 y 7, por modus ponendo ponens.
9. $g \vee f$	De 8 por ley de la adición.

PROBLEMAS RESUELTOS 2.1

PROBEMA 1. Probar que la implicación lógica es:

a. **Reflexiva.** Esto es, $A \Rightarrow A$, $\forall A$

b. **Antisimétrica.** Esto es, **si** $A \Rightarrow B$ **y** $B \Rightarrow A$, **entonces** $A \equiv B$

c. **Transitiva**. Esto es, **si** $A \Rightarrow B$ **y** $B \Rightarrow C$, **entonces** $A \Rightarrow C$

Solución

a. A $\Rightarrow$ A, ya que para cualquier asignación de valores de las variables de A que hace a A verdadera, hace también a A verdadera.

b. Si una asignación de valores que hace a A verdadera, como $A \Rightarrow B$, hace también a B verdadera, y si una asignación de valores que hace a B verdadera, como $B \Rightarrow A$, hace también a A verdadera. Luego, cualquier asignación de valores hace a A verdadera si y sólo si hace a B verdadera. Por tanto, $A \equiv B$.

c. Si una asignación de valores que hace a A verdadera, como A $\Rightarrow$ B, hace también a B verdadera, y si una asignación de valores que hace a B verdadera, como B $\Rightarrow$ C, hace también a C verdadera. Luego, cualquier asignación de valores hace a A verdadera, hace también a C verdadera. Por tanto, A $\Rightarrow$ C.

PROBLEMA 2 Demostrar que el siguiente razonamiento es válido:

1. $\sim q \rightarrow \sim p$
2. $\sim r$
3. $q \rightarrow t$
4. $\underline{p \vee r}$

t

Demostración.

5. p	De 2 y 4, por silogismo disyuntivo
6. $p \rightarrow q$	De 1, por la ley del contrarecíproco
7. q	De 5 y 6, por modus ponendo ponens
8. t	De 3 y 7, por modus ponendo ponens.

PROBLEMA 3 Demostrar que el siguiente razonamiento es válido:

1. $p \rightarrow s$
2. $s \rightarrow \sim t$
3. $q \wedge d \rightarrow (\sim h \rightarrow \sim t)$
4. $(p \vee q) \wedge (p \vee d)$
5. t

h

Demostración

6. $p \rightarrow \sim t$	De 1 y 2, por silogismo hipotético
7. $\sim p$	De 5 y 6, por modus tollendo tollens
8. $p \vee (q \wedge d)$	De 4, por ley distributiva
9. $q \wedge d$	De 7 y 8, por silogismo disyuntivo
10. $\sim h \rightarrow \sim t$	De 3 y 9, por modus ponendo ponens
11. $h \vee \sim t$	De 10, por ley del condicional
12. h	De 5 y 11, por silogismo disyuntivo.

PROBLEMA 4 Demostrar la validez de:

1. $p \rightarrow (r \rightarrow q)$
2. $\sim s \vee p$
3. r

$s \rightarrow q$

Demostración.

4. $\sim s$	Caso 1 en 2.
5. $\sim s \vee q$	De 4, por ley de la adición.
6. $s \rightarrow q$	De 5, por ley del condicional.
7. p	Caso 2 en 2.
8. $r \rightarrow q$	De 1 y 7, por modus ponendo ponens.
9. q	De 3 y 8, por modus ponendo ponens.

10. $\sim s \vee q$	De 9, por ley de la adición.
11. $s \rightarrow q$	De 10, por ley del condicional.

PROBLEMA 5 Probar la validez del **dilema constructivo**:

1. $p \rightarrow q$
2. $r \rightarrow s$
3. $\underline{p \vee r}$

$q \vee s$

O sea

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \Rightarrow q \vee s$$

Demostración.

4. p	Caso 1 en 3.
5. q	De 1 y 4, por modus ponendo ponens.
6. $q \vee s$	De 5, por ley de la adición.
7. r	Caso 2 en 3.
8. s	De 2 y 7, por modus ponendo ponens.
9. $q \vee s$	De 5, por ley de la adición.

PROBLEMA 6 Demostrar la validez de:

1. $p \wedge q \rightarrow r$
2. $(p \rightarrow r) \rightarrow s$
3. $\underline{\sim q \vee t}$

$q \rightarrow s \wedge t$

Demostración.

4. $\sim(p \wedge q) \vee r$	De 1, por ley del condicional
5. $(\sim p \vee \sim q) \vee r$	De 4, por ley de De Morgan
6. $\sim q \vee (\sim p \vee r)$	De 5, por ley conmutativa y ley asociativa
7. $q \rightarrow (p \rightarrow r)$	De 6, por ley del condicional
8. $q \rightarrow s$	De 2 y 7, por silogismo hipotético

9.	$\sim q \vee s$	De 8, por ley del condicional
10.	$(\sim q \vee s) \wedge (\sim q \vee t)$	De 3 y 9, por ley de la conjunción
11.	$\sim q \vee (s \wedge t)$	De 10, por ley distributiva
12.	$q \rightarrow (s \wedge t)$	De 11, por ley del condicional.

PROBLEMA 7 Demostrar la validez del siguiente razonamiento:

Si estudio en la universidad, no puedo trabajar. Si no puedo trabajar, no tengo dinero. Me casaré con mi novia solamente si tengo dinero. Si no me caso con mi novia, ella será infeliz. Pero si no estudio en la universidad no seré profesional, y si no soy profesional no me casaré con mi novia. O estudio en la universidad o no estudio. Luego, mi novia será infeliz.

Solución

Simbolizamos el razonamiento:

1. $u \rightarrow \sim t$
2. $\sim t \rightarrow \sim d$
3. $c \rightarrow d$
4. $\sim c \rightarrow \sim f$
5. $\sim u \rightarrow \sim p$
6. $\sim p \rightarrow \sim c$
7. $u \underline{\vee} \sim u$

$\sim f$

u : estudio en la universidad.
t : puedo trabajar.
d : tengo dinero.
c : me caso con mi novia.
f : mi novia será feliz.
p : seré profesional.

Demostración

8.	$u \vee \sim u$	De 7 y el ejemplo 1.c, por modus ponendo ponens.
9.	u	Caso 1 en 8.
10.	$\sim d \rightarrow \sim c$	De 3, por ley del contrarrecíproco.
11.	$u \rightarrow \sim f$	De 1, 2, 10 y 4 , por silogismo hipotético.
12.	$\sim f$	De 9 y 11, por modus ponendo ponens.

13.	$\sim u$	Caso 2 en 8.
14.	$\sim u \rightarrow \sim f$	De 5, 6 y 4, por silogismo hipotético.
15.	$\sim f$	De 13 y 14, por modus ponendo ponens.

PROBLEMA 8 Probar que el siguiente razonamiento es válido:

Si no salgo a pasear, entonces estudio. Voy a clases o no apruebo la materia. Si salgo a pasear o no voy clases, entonces no consulto al profesor. Consulto al profesor o no voy a clases. Luego, que estudie es condición necesaria para que apruebe la materia.

Solución

Simbolizamos el razonamiento:

1. $\sim s \rightarrow e$
2. $v \vee \sim a$
3. $s \vee \sim v \rightarrow \sim p$
4. $p \vee \sim v$

$e \rightarrow a$

s : salgo a pasear.
e : estudio.
v : voy a clases.
a : apruebo la materia.
p : consulto al profesor

Demostración.

5. p	Caso 1 en 4.
6. $\sim(s \vee \sim v)$	De 3 y 5, por modus tollendo tollens.
7. $\sim s \wedge v$	De 6, por De Morgan.
8. $\sim s$	De 7, por la ley de simplificación.
9. e	De 1 y 8, por modus ponendo ponens.
10. $\sim a \vee e$	De 9, por la ley de adición.
11. $a \rightarrow e$	De 10, por ley del condicional.
12. $\sim v$	Caso 2 en 4.
13. $\sim a$	De 2 y 12, por silogismo disyuntivo.
14. $\sim a \vee e$	De 13, por la ley de adición.
15. $a \rightarrow e$	De 14, por ley del condicional.

PROBLEMA 9 Probar que el siguiente razonamiento es válido:

O ganan Los Cardenales o ganan Las Aguilas. Si los Cardenales ganan, los larenses lo celebrarán; pero si ganan Las Aguilas los zulianos lo celebrarán. Además, si ganan Los Cardenales, los zulianos no lo celebrarán; pero si ganan Las Aguilas, los larenses no lo celebrarán. En consecuencia, los larenses lo celebrarán si y sólo sí los zulianos no lo celebrarán.

Solución.

Simbolizamos el razonamiento:

1. $c \underline{\vee} a$	c : ganan los Cardenales.
2. $c \rightarrow l$	a : ganan las Aguilas.
3. $a \rightarrow z$	l : los larenses lo celebrarán.
4. $c \rightarrow \sim z$	z : los zulianos lo celebrarán.
5. $\underline{a \rightarrow \sim l}$	
$l \leftrightarrow \sim z$	

Demostración

6. $c \vee a$	De 1 y ejemplo 1 c, por modus ponendo ponens.
7. c	Caso 1 en 6
8. l	De 2 y 7, por modus ponendo ponens.
9. $z \vee l$	De 8, por ley de la adición.
10. $\sim z \rightarrow l$	De 8, por ley del condicional.
11. $\sim z$	De 4 y 7, por modus ponendo ponens.
12. $\sim l \vee \sim z$	De 11, por ley de la adición.
13. $l \rightarrow \sim z$	De 11, por ley del condicional.
14. $l \leftrightarrow \sim z$	De 10 y 13, por la ley del bicondicional.

14. a	Caso 2 en 6
15. z	De 3 y 14, por modus ponendo ponens.
16. $\sim\sim z$	De 15, por la ley de doble negación.
17. $\sim\sim z \vee l$	De 16, por la ley de adición.
18. $\sim z \rightarrow l$	De 16, por la ley del condicional.
19. $\sim l$	De 5 y 14, por modus ponendo ponens.
20. $\sim l \vee \sim z$	De 19, por la ley de la adición.
21. $l \rightarrow \sim z$	De 20, por la ley del condicional.
22. $l \leftrightarrow z$	De 18 y 21, la ley del bicondicional.

PROBLEMA 10 Demostrar la validez del siguiente razonamiento:

Si el mar no está agitado y no hay tormenta, la visibilidad dentro del agua es buena. Si la visibilidad dentro del agua es buena, bajaremos a 50 m. de profundidad. Si somos submarinistas experimentados, los tiburones no nos preocupan. Somos submarinistas experimentados. No bajaremos a 50 m. de profundidad o los tiburones nos preocupan. Luego, el mar está agitado o hay tormenta.

Solución

Simbolizamos el razonamiento:

1. $\sim a \wedge \sim t \rightarrow v$
2. $v \rightarrow b$
3. $s \rightarrow \sim p$
4. s
5. $\underline{\sim b \vee p}$

$a \vee t$

a : el mar está agitado.

t : hay tormenta.

v : la visibilidad dentro del agua es buena.

b : bajaremos a 50 m. de profundidad.

s : somos submarinistas experimentados.

p : los tiburones nos preocupan.

Demostración

6. $\sim p$ — De 3 y 4, por modus ponendo ponens.
7. $\sim b$ — De 5 y 6, por silogismo disyuntivo.
8. $\sim v$ — De 2 y 7, por modus tollendo tollens.
9. $\sim(\sim a \wedge \sim t)$ — De 1 y 8, por modus tollendo tollens.
10. $a \vee t$ — De 9, por ley de De Morgan.

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.1

1. Probar, mediante tablas de verdad, que los siguientes razonamientos son falacias.

   La primera es conocida con el nombre de falacia de negar el antecedente.

   a. $p \rightarrow q$, $\underline{\sim p}$, $\sim q$ **b.** $p \rightarrow q$, $\underline{p \wedge q}$, q

2. Sea p una proposición cualquiera. Probar, mediante tablas de verdad, que

   a. $\mathbf{0} \Rightarrow p$ **b.** $p \Rightarrow \mathbf{1}$

3. Probar, deductivamente, la **ley de la adición**:

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

4. Probar, deductivamente, la **ley del silogismo hipotético**:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

5. Probar, deductivamente, la **ley del silogismo disyuntivo:**

$$(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$$

6. Si A es una tautología y $A \Rightarrow B$, probar que B es una tautología.

En los problemas del 7 al 23, probar deductivamente la validez del razonamiento.

7.
$$\begin{array}{l} \sim p \\ \hline \sim(p \wedge q) \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{l} q \rightarrow r \\ p \vee q \\ \hline p \vee r \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{l} \sim q \rightarrow \sim p \\ q \rightarrow r \\ \hline p \rightarrow r \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{l} r \rightarrow q \\ \sim p \rightarrow \sim q \\ r \vee t \\ \sim p \\ \hline t \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ t \vee s \\ t \rightarrow (\sim p \vee \sim r) \\ r \\ \hline q \vee s \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \vee \sim t \\ \hline t \rightarrow q \end{array}$$

13.
$$\begin{array}{l} t \rightarrow p \\ p \rightarrow (r \rightarrow q) \\ r \\ \hline \sim q \rightarrow \sim t \end{array}$$

14.
$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ r \rightarrow (s \rightarrow \sim t) \\ b \vee (s \wedge t) \\ \hline p \rightarrow (q \rightarrow b) \end{array}$$

15.
$$\begin{array}{l} p \rightarrow \sim m \\ \sim p \rightarrow \sim f \wedge \sim g \\ f \wedge h \\ \hline h \leftrightarrow \sim m \end{array}$$

16.
$$\begin{array}{l} r \rightarrow p \\ \sim p \vee (\sim q \wedge r) \\ t \vee r \rightarrow h \\ r \vee \sim h \\ \hline q \rightarrow \sim t \end{array}$$

17.
$$\begin{array}{l} r \vee \sim h \\ \sim h \rightarrow \sim t \wedge \sim r \\ \sim p \vee (\sim q \wedge r) \\ \sim p \rightarrow \sim r \\ \hline t \rightarrow \sim q \end{array}$$

18.
$$\begin{array}{l} p \wedge r \rightarrow q \\ s \rightarrow p \\ r \\ \hline s \rightarrow q \end{array}$$

19.
$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ \sim q \rightarrow s \\ \sim r \\ \sim p \wedge q \rightarrow d \\ \hline \sim d \rightarrow s \end{array}$$

20.
$$\begin{array}{l} q \rightarrow p \\ \sim r \\ \sim(s \rightarrow t) \rightarrow \sim p \\ \sim r \rightarrow q \\ \hline \sim t \rightarrow \sim s \end{array}$$

21.
$$\begin{array}{l} a \wedge b \rightarrow d \\ d \rightarrow (p \rightarrow \sim t) \\ q \vee (p \wedge t) \\ \hline a \wedge b \rightarrow q \end{array}$$

22. $h \vee r \rightarrow \sim q$
$h \vee \sim q \vee \sim p$
$\sim p \rightarrow (\sim h \rightarrow \sim t)$
$\overline{\quad q \rightarrow \sim t \quad}$

23. $\sim r \vee h$
$t \vee r \rightarrow \sim h$
$\sim r \rightarrow \sim q$
$q \vee (\sim p \wedge r)$
$\overline{\quad t \rightarrow \sim p \quad}$

24. Probar el modus tollendo tollens usando el modus ponendo ponens y la ley del contrarrecíproco.

25. Probar el silogismo disyuntivo usando el modus tollendo tollens.

26. Probar el silogismo hipotético usando las otras leyes.

27. Probar, deductivamente, la validez del **dilema destructivo**:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \underline{\sim q \vee \sim s} \\ \sim p \vee \sim r \end{array}$$

En los problemas del 28 al 56, probar la validez del razonamientos dado:

28. Si el paquete es liviano y no es muy grande, el correo lo aceptará. Si el paquete contiene ropa, entonces es liviano. El paquete no es muy grande. Luego, si el paquete contiene ropa, el correo lo aceptará.

29. Si Carlos o Anita van al cine, entonces Jaimito se queda en casa. Luego, si Anita va al cine, Jaimito se queda en casa.

30. Entramos a este restaurante sólo si la comida es buena. O la comida es barata o la comida no es buena. La comida no es barata. Luego, no entramos a este restaurante.

31. Si llego a tiempo, cenaré, siempre que tenga apetito. No cené y tengo apetito. En consecuencia, no llegué a tiempo.

32. Si se devalúa el bolívar, la inflación se acelerará; y si el bolívar se mantiene estable, las divisas no bajarán. O el bolívar se devalúa o éste se mantiene estable. Si se devalúa el bolívar, las divisas bajarán. Si el bolívar se mantiene estable, la inflación no se acelerará. Luego, la inflación se acelerará si y sólo si las divisas bajarán.

33. Si Javier se casa, entonces tiene que trabajar; y si trabaja no podrá estudiar. Si Javier no se casa, entonces perderá mucho tiempo visitando a su novia; y si pierde tiempo, no podrá estudiar. Si Javier no estudia, sus padres se sentirán infelices. Luego, los padres de Javier se sentirán infelices.

34. Es necesario no aprobar Cálculo para estudiar Estructuras. Si no estudio Estructuras, no me castigan y no voy a la fiesta. Me castigan y salgo a pasear. Luego, salgo a pasear es necesario y suficiente para no aprobar Cálculo.

35. Si estudio computación, ganaré mucho dinero. Si estudio periodismo, conoceré mucha gente. Si gano mucho dinero o conozco mucha gente, seré feliz. Por tanto, si soy infeliz, no estudié computación ni estudié periodismo.

36. Si no hay tormenta, entonces no es cierto que, no me quedaré en casa y que no dormiré temprano. Si no hay muchas nubes negras, entonces no habrá tormenta. Si viene Pedro, no iré al cine. Es suficiente que haya muchas nubes negras para que Pedro venga. Voy al cine. Luego, me quedo en casa o me duermo temprano.

SECCION 2.2
METODOS DE DEMOSTRACION

La demostración de un razonamiento válido se reduce a probar la implicación

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C,$$

donde P_1, P_2, $P_3, \ldots$ y P_n son las premisas y C es la conclusión. Para la demostración puede usarse el **método directo** o un **método indirecto**. En todas las demostraciones sobre proposiciones, que hemos presentado en la sección anterior, hemos usado el método directo. Este consiste en una cadena de proposiciones, que usando las premisas, nos conducen a la conclusión. Veamos como funciona este método en la matemática. Recordar, que en esta ciencia, las proposiciones que se demuestran se llaman teoremas, en los cuales las premisas constituyen la **hipótesis** y la conclusión es la **tesis**.

EJEMPLO 1 Demostrar, en forma directa, el siguiente teorema:

Si n es número par, entonces n^2 es par.

Simbólicamente,

$$n \text{ es par} \Rightarrow n^2 \text{ es par}$$

Demostración.

1. n es par	Hipótesis.
2. $n = 2k$, para algún entero k.	Definición de número par.
3. $n^2 = (2k)^2$	De 2, elevando al cuadrado.
4. $n^2 = 4k^2$	De 3, potencia de un producto.
5. $n^2 = 2(2k^2)$	De 4, por descomposición en factores.
6. $n^2 = 2k_1$	De 5, haciendo $k_1 = 2k^2$
7. n^2 es par	De 6, definición de número par.

Los métodos de demostración indirecta, en lugar de probar la implicación

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C,$$

se prueba una implicación equivalente.

Aquí presentamos dos de ellos: el **método del contrarrecíproco y el método de reducción al absurdo.**

METODO DEL CONTRARRECIPROCO

Hacemos uso de la ley del contrarrecíproco. En lugar de

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C,$$

Probamos su contrarrecíproco:

$$\sim C \Rightarrow \sim(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n)$$

EJEMPLO 2 Probar la validez del siguiente razonamiento, usando el método del contrarrecíproco.

$$\frac{p \rightarrow q}{p \rightarrow p \wedge q}$$

Solución

Debemos probar que $(p \rightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow p \wedge q)$. En lugar de esta implicación, probaremos su contrarrecíproco:

$$\sim(p \rightarrow p \wedge q) \Rightarrow \sim(p \rightarrow q)$$

O sea, debemos probar que el siguiente razonamiento es válido:

$$1.\ \frac{\sim(p \rightarrow p \wedge q)}{\sim(p \rightarrow q)}$$

Bien, demostremos esto último:

2. $\sim(p \rightarrow p \wedge q)$	Premisa 1.
3. $\sim(\sim p \vee (p \wedge q))$	De 2, por ley del condicional.
4. $\sim\sim p \wedge \sim(p \wedge q)$	De 3, por la ley de De Morgan.
5. $p \wedge \sim(p \wedge q)$	De 4 y ley de doble negación
6. $p \wedge (\sim p \vee \sim q)$	De 5, por ley de De Morgan
7. $(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$	De 6, por ley de distributividad.
8. $\mathbf{0} \vee (p \wedge \sim q)$	De 7, por ley de complementación.
9. $p \wedge \sim q$	De 8, por ley de identidad.
10. $\sim(\sim(p \wedge \sim q))$	De 9, por ley de doble negación.
11. $\sim(\sim p \vee q)$	De 10, por ley de De Morgan.
12. $\sim(p \rightarrow q)$	De 11, por ley del condicional.

EJEMPLO 3 Demostrar, mediante el método del contrarrecíproco, el teorema.

Si n^2 es un número par, entonces n es par.

O sea

n^2 es par $\Rightarrow$ n es par

Solución

El contrarrecíproco de este teorema es:

n no es par $\Rightarrow$ n^2 no es par

O sea

n es impar $\Rightarrow$ n^2 es impar

Probemos esto último:

1. n es impar.	Hipótesis.
2. $n = 2k + 1$, para algún entero k.	Definición de número entero impar.
3. $n^2 = (2k + 1)^2$	De 2, elevando al cuadrado.
4. $n^2 = 4k^2 + 2(2k)(1) + 1$	De 3, cuadrado de un binomio.
5. $n^2 = 2[2k^2 + 2k] + 1$	De 4, factorizando.
6. $n^2 = 2k_1 + 1$	De 4, haciendo $k_1 = 2k^2 + 2k$.
7. n^2 es impar	De 6, por definición de entero impar.

OBSERVACION Los dos resultados dados en el ejemplo 1 y en el ejemplo 3 se pueden expresar en una sola proposición, que es la siguiente:

n es par $\Leftrightarrow$ n^2 es par.

METODO DE REDUCCION AL ABSURDO

La ley de reducción al absurdo nos dice que:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C) \equiv (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge \sim C \Rightarrow \mathbf{0})$$

Luego, si al agregar a las premisas la negación de la conclusión se obtiene, como consecuencia la lógica, una contradicción, entonces el razonamiento es válido. La contradicción que aparece es de la forma: $q \wedge \sim q$.

EJEMPLO 4 Mediante el método de reducción al absurdo, probar la validez de

1. $p \vee \sim q \rightarrow p \wedge r$
2. $\underline{\sim r}$

q

Solución.

A las premisas dadas agregamos la negación de la conclusión:

1. $p \vee \sim q \rightarrow p \wedge r$
2. $\sim r$
3. $\sim q$

Ahora, aplicando las leyes lógicas, buscamos una contradicción:

4. $p \vee \sim q$	De 3, por la ley de la adición.
5. $p \wedge r$	De 1 y 4, por modus ponendo ponens
6. r	De 5, por la ley de simplificación
7. $r \wedge \sim r$, ¡contradicción!	De 2 y 6, por la ley de la conjunción
8. q	De 7, por la ley de reducción al absurdo.

Aclaremos un poco más la demostración de este ejemplo 4. Tenemos dos razonamientos

a.
1. $p \vee \sim q \rightarrow p \wedge r$
2. $\sim r$

q

b)
1. $p \vee \sim q \rightarrow p \wedge r$
2. $\sim r$
3. $\sim q$

$r \wedge \sim r$

Lo que nos piden es probar la validez del primero. Para esto, lo que hemos hecho es probar la validez del segundo. La ley de reducción al absurdo nos dice que este resultado equivale a probar la validez del primero.

EJEMPLO 5 Probar que el número real $\sqrt{2}$ es irracional. Esto es,

$$\sqrt{2} \text{ es real} \Rightarrow \sqrt{2} \text{ es irracional.}$$

Solución

Probaremos este teorema por el método de reducción al absurdo.

Presentamos la prueba en dos estilos: el estilo simplificado, como se procede en los textos de matemática, y luego presentamos en el estilo detallado y numerado, que es con él que hemos estado trabajando.

Demostración

Supongamos que $\sqrt{2}$ no es irracional. En este caso, ya que un número real o es irracional o es racional, $\sqrt{2}$ es racional. Luego, por definición de número racional, existen dos números enteros n y m, con $m \neq 0$, tales que

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}. \qquad \textbf{(1)}$$

Simplificando la fracción $\frac{n}{m}$ tantas veces como sean necesarias, podemos suponer que n y m son primos entre sí. Es decir, n y m no tienen factores comunes.

Ahora, de $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ obtenemos que $\sqrt{2}\, m = n$, y , elevando al cuadrado,

$$2m^2 = n^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Esta última igualdad nos dice que n^2 es un número par y por el ejemplo 3 anterior, concluimos que n es par. Luego, $n = 2k$, para algún entero k. Reemplazando esta igualdad en (2) se obtiene que $2m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ y, de donde,

$$m^2 = 2k^2 \qquad \textbf{(3)}$$

Esta igualdad nos dice que m^2 es par. Invocando nuevamente al ejemplo 3 anterior, obtenemos que m es también par. De este modo, hemos logrado probar que los enteros n y m son ambos números pares y, por tanto no son primos entre sí. Esto contradice la suposición de que n y m son primos.

Esta contradicción provino de suponer que $\sqrt{2}$ es racional. Por tanto, debemos admitir que $\sqrt{2}$ es irracional.

Veamos esta prueba en el otro estilo. Debemos probar la validez del razonamiento:

$$\sqrt{2} \text{ es real} \wedge \sqrt{2} \text{ no es irracional} \Rightarrow \mathbf{0} \text{ (¡contradicción!)}$$

Demostración

1. $\sqrt{2}$ es real	Hipótesis.
2. $\sqrt{2}$ no es irracional	Hipótesis.
3. $\sqrt{2}$ es racional	De 1 y 2
4. $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, donde n y m son enteros y $m \neq 0$.	Definición de racional.
5. n y m son primos entre sí.	Simplificando la fracción $\frac{n}{m}$.
6. $\sqrt{2}\, m = n$	De 5, pasando m a multiplicar.
7. $2m^2 = n^2$	De 6, elevando al cuadrado.
8. n^2 es par	De 7, por definición de par.
9. n es par	De 8, por el ejemplo 3.
10. $n = 2k$, para algún entero k.	De 9, por definición de par.
11. $m^2 = 4k^2$	De 10, elevando al cuadrado.
12. $m^2 = 2(2k^2)$	De 11, factorizando.

13. m^2 es número par	De 12, por definición de par.
14. m es número par	De 13, por el ejemplo 3.
15. n y m no son primos entre sí.	De 9 y 14, 2 es factor común.
16. n y m son y no son primos entre sí. ¡Contrad.!	De 5 y 15, por ley de la Conj.
17. $\sqrt{2}$ es irracional	Ley de reducción al absurdo.

PROBLEMAS RESUELTOS 2.2

PROBLEMA 1 Probar la validez del siguiente razonamiento, por el método de reducción al absurdo.

1. $a \wedge b \rightarrow d$
2. $d \rightarrow (p \rightarrow \sim t)$
3. $\underline{\sim q \rightarrow p \wedge t}$

$a \wedge b \rightarrow q$

Solución

4. $\sim(a \wedge b \rightarrow q)$	Premisa adicional para reducción al absurdo
5. $\sim(\sim(a \wedge b) \vee q)$	De 4, por ley del condicional
6. $(a \wedge b) \wedge \sim q$	De 5, por ley de De Morgan.
7. $a \wedge b$	De 6, por ley de la simplificación.
8. $a \wedge b \rightarrow (p \rightarrow \sim t)$	De 1 y 2, por silogismo hipotético.
9. $p \rightarrow \sim t$	De 7 y 8, por modus ponendo ponens.
10. $\sim q$	De 6, por ley de simplificación.
11. $p \wedge t$	De 3 y 10, por modus ponendo ponens.
12. p	De 11, por ley de la simplificación.
13. $\sim t$	De 9 y 12, por modus ponendo ponens.
14. t	De 11, por ley de la simplificación.
15. $t \wedge \sim t$ ¡contradicción!	De 13 y 14, por ley de la conjunción.
16. $a \wedge b \rightarrow q$	De 15, por ley de la reducción al absurdo.

PROBLEMA 2 Probar que existen infinitos números primos.

Solución

Procedemos por reducción al absurdo:

Supongamos que sólo existe un número finito de primos. Digamos que todos estos son: p_1, p_2, p_3, ..., p_k. Es decir, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.

Consideremos el número m que se obtiene multiplicando todos los primos y aumentado 1 a este producto. Es decir, $m = p_1p_2p_3 \ldots p_k + 1$.

Como m es mayor que todos los primos, m no es primo y, por tanto, debe ser divisible por algún primo, digamos p_j. Tenemos, entonces que p_j divide a m. Pero p_j también divide al producto de todos los primos $p_1p_2p_3, \ldots p_k$, ya que p_j es un factor de este producto. En consecuencia, por el problema propuesto 5 de esta sección, p_j divide a la diferencia $m - p_1p_2p_3 \ldots p_k = 1$. Esto es una contradicción, ya que ningún primo divide a 1.

PROBLEMA 3 Sean x e y dos números reales. Probar que

$$x + y > 100 \Rightarrow x > 50 \vee y > 50$$

Solución.

Usaremos el método del contrarrecíproco.

Debemos probar que:

$$\sim(x > 50 \vee y > 50) \Rightarrow \sim(x + y > 100)$$

O sea,

$$x \leq 50 \wedge y \leq 50 \Rightarrow x + y \leq 100$$

Bien,

1. $x \leq 50$	Hipótesis.
2. $y \leq 50$	Hipótesis.
3. $x + y \leq 50 + 50 = 100$	De 1 y 2, sumado.

PROBLEMA 4. Probar que la suma 3 tres números consecutivos es múltiplo de 3.

Solución

Tres enteros consecutivos son de la forma:

$$n, n + 1 \text{ y } n + 2$$

Si S es la suma de estos 3 números, entonces

$$S = n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

Luego, S es múltiplo de 3.

PROBLEMA 5. Probar, mediante el método del contrarrecíproco, la validez de:

$$\frac{p \to (q \to r)}{(p \wedge q) \to r}$$

Solución

Se pide probar que: $p \to (q \to r) \Rightarrow (p \wedge q) \to r$.

En lugar de esta implicación, probaremos su contrarrecíproca:

$$\sim[(p \wedge q) \to r] \Rightarrow \sim[p \to (q \to r)]$$

O sea,

$$\frac{\sim[(p \wedge q) \to r]}{\sim[p \to (q \to r)]}$$

Bien,

$$\begin{aligned}
\sim[(p \wedge q) \to r] &\equiv \sim[\sim(p \wedge q) \vee r] && \text{(Ley del condicional)}\\
&\equiv \sim[(\sim p \vee \sim q) \vee r] && \text{(Ley de De Morgan)}\\
&\equiv \sim[\sim p \vee (\sim q \vee r)] && \text{(Ley asociativa)}\\
&\equiv \sim[\sim p \vee (q \to r)] && \text{(Ley del condicional)}\\
&\equiv \sim[p \to (q \to r)] && \text{(Ley del condicional)}
\end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.2

Probar, mediante el método directo, los siguientes teoremas.

1. La suma de enteros pares es par.
2. La suma de enteros impares es par.
3. La suma de 5 números enteros consecutivos es múltiplo de 5.
4. Si el entero m es múltiplo de 3, entonces m^2 es múltiplo de 3.
5. Si un número entero divide a otros dos, entonces divide a su suma y divide a su diferencia. O sea,
   si d divide a m y d a n, entonces d divide a $m+n$ y d divide a $m-n$.

6. Mediante el método del contrarrecíproco, probar la validez:

$$\frac{p \to q}{p \vee q \to q}$$

Mediante el método del contrarrecíproco, probar los siguientes resultados.

7. Si un entero m no es divisible por 2, entonces m no es divisible por 4.

8. Si el entero m^2 es múltiplo de 3, entonces m es múltiplo de 3.

Sugerencia: $m = 3k$, $m = 3k + 1$ ó $m = 3k + 2$.

Los dos resultados de los problemas 4 y 8 se pueden expresar en uno solo:

$$m \text{ es múltiplo de } 3 \Leftrightarrow m^2 \text{ es múltiplo de } 3.$$

9. Sean a y b dos números reales.
Si a y b son positivos y $ab > 16$, entonces $a > 4$ ó $b > 4$.

Mediante el método de reducción al absurdo, probar la validez de:

11.
$$\begin{array}{l} p \to (q \vee r) \\ q \to \sim p \\ t \to \sim r \\ \underline{p \qquad\qquad} \\ \quad \sim t \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{l} (p \wedge r) \to q \\ \underline{r \qquad\qquad} \\ p \to q \end{array}$$

13.
$$\begin{array}{l} p \to r \\ \sim q \to s \\ \sim r \\ \underline{\sim p \wedge q \to d} \\ \sim d \to s \end{array}$$

14.
$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ p \to r \end{array}$$

Mediante el método de reducción al absurdo, probar los siguientes resultados.

15. Si a es un número racional y b es irracional, entonces $a + b$ es irracional.

16. Si a es un número racional, $a \neq 0$ y b es irracional, entonces ab es irracional.

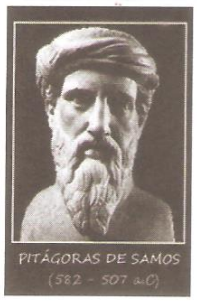
17. El número real $\sqrt{3}$ es irracional. *Sugerencia: Usar el problema propuesto 8.*

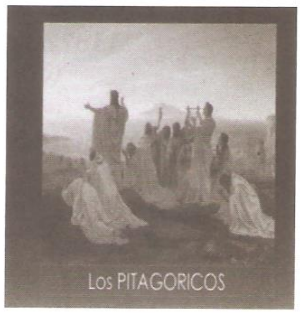
EL DESCUBRIMIENTO DE LOS IRRACIONALES. UNA HISTORIA TRAGICA

La historia trágica, pero de gran relevancia para el desarrollo de la Matemática sucedió en la Grecia Antigua. Sus protagonistas fueron pitagóricos.

El pitagorismo o la escuela pitagórica fue una sociedad o hermandad esotérica, metafísica, filosófica, científica y religiosa, fundada por ***Pitágoras*** *en* ***Crotona*** *(sur de Italia) en el siglo V A. C. Sus reglas de convivencia eran muy estrictas. Eran vegetarianos y no podían tomar vino. Una de sus principales creencias sostenía que* ***en los números están las bases y la esencia de todas las cosas.*** *Para ellos número significaba número natural o número fraccionario (número racional).*

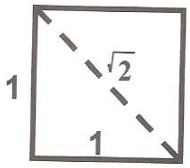
Los miembros de la sociedad se comprometían, bajo un solemne juramento, a mantener el secreto de las enseñanzas de la escuela.

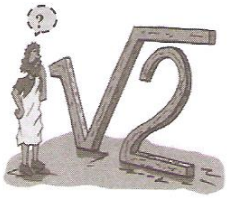




Uno de los primeros discípulos de Pitágoras fue ***Hipaso de Metaponto.***

Hipaso se planteo el problema de medir la diagonal de un cuadrado de lado 1 *en términos de la longitud del lado.* ***¡Gran sorpresa!,*** *descubrió que esta medida, que es* $\sqrt{2}$ *, no podía expresarse ni como un número natural ni como una fracción. Este resultado contradecía la creencia pitagórica de todo ente del universo se construye con las números naturales o con las fracciones.*





Hipaso de Metaponto

Hipaso había descubierto los números irracionales. *Este hecho le planteo un serio dilema: Ser fiel al credo de su escuela, silenciando el resultado, o ser fiel a la ciencia, divulgando su encuentro. Optó por la segunda posibilidad.*

Se cuenta que los pitagóricos estaban navegando en alta mar cuando se enteraron de este hecho. Reaccionaron con furia. Se sintieron traicionados. Para castigar la supuesta traición, lanzaron a Hipaso al mar, muriendo ahogado.

lipaso de Metaponto

e hecho le planteo un
esultado, o ser fiel a la
lidad.
alta mar cuando se
on traicionados. Para
iendo ahogado.

3

CUANTIFICADORES

BERTRAND RUSSELL
(1.872-1.970)

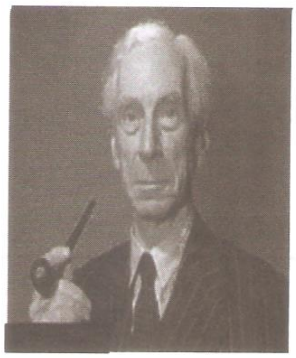
3.1 FUNCIONES PROPOSICIONALES

3.2 CUANTIFICADORES UNIVERSAL Y EXISTENCIAL

3.3 EL METODO AXIOMATICO

BREVE HISTORIA DE LA LOGICA

BERTRAND RUSSELL
(1.872-1.970)



BERTRAND RUSSELL *nació en Trellek, País de Gales, Inglaterra, proviniendo de una familia aristocrática. Estudió matemáticas en la Universidad de Cambrige, donde se graduó con honores en 1.893, a la edad de 21 años.*

En julio de 1.900, junto con su amigo y exprofesor ***Alfred Whitehead,*** *asistieron al Congreso Internacional de Filosofía, Lógica e Historia de la Ciencia, que tuvo lugar en París. Quedaron fuertemente impresionados por las conferencias del matemático italiano Giuseppe Peano, que se distinguían por su precisión lógica. Tan pronto regresaron a Inglaterra, basándose en los resultados de Geoge Boole (1.815-1.864), Gottlob Frege (1.848-1.925) y Peano, dieron inicio a su trabajo en el campo de, la recientemente bautizada,* ***lógica matemática****. Esta labor alcanza su cúspide con la publicación de su monumental obra* ***"Principia Mathematica",*** *la cual fue escrita entre 1.903 y 1.913. Le pusieron este nombre emulando a Isaac Newton, quien revolucionó la Física con su obra* ***"Principia".***

Además de la matemática, la lógica y la filosofía, Russell cultivó las letras. Fue un gran escritor. Ganó el Premio Nobel de Literatura del año 1.950.

Russell también resaltó por sus inquietudes sociales. Participó, en forma muy activa, en los movimientos pacifistas. Fue un tremendo opositor al uso de la bomba atómica.

ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

Durante la larga vida de B. Russell (98 años) sucedieron muchos de los acontecimientos que han dado forma a nuestro mundo actual. Entre estos tenemos: La Primera Guerra Mundial (1.914-1.918), la Segunda Guerra Mundial (1.939-1.945), la Revolución Rusa (1.917), la Revolución China (1.949). En América sucedieron los siguientes hechos saltantes: La Revolución Mejicana (1.910), culminó la construcción del Canal de Panamá (1.914), la Revolución Cubana (1.959).

SECCION 3.1

FUNCIONES PROPOSICIONALES

Con mucha frecuencia hallamos ciertos juicios declarativos que, sin ser proposiciones, están estrechamente relacionados con éstas.

Consideremos los juicios declarativos:

1. $x^2 = 9$
2. $y < 5$
3. z fue campeón de los pesos pesados.

Debido a que en cada uno de estos juicios aparecen variables, no podemos decir si son verdaderos o falsos. Sin embargo, asignando valores particulares a cada variable, obtenemos proposiciones. Así, si en (1) reemplazamos la "x" por 3; en (2) reemplazamos la "y" por 7, y en (3) la "z" por Mohamed Alí, obtenemos las proposiciones:

4. $3^2 = 9$
5. $7 < 5$
6. Mohamed Alí fue campeón de los pesos pesados.

A estos juicios declarativos, que poseen variables, se los llama **funciones proposicionales o proposiciones abiertas**.

Para tener una función proposicional no basta contar con solamente un juicio declarativo que contenga variables. Se debe indicar, además, un conjunto en cual las variables toman sus valores. Este conjunto se llama **dominio de la función proposicional**. En conclusión, una función proposicional está constituida por dos objetos: **un conjunto** y **un juicio declarativo** que contiene variables. El juicio es tal que, cuando cada variable es reemplazada por un elemento específico del conjunto dado, produce proposiciones.

Denotaremos con $P(x)$, $Q(x)$, etc., a los juicios declarativos que contengan a la variable x. Con esta notación, una función proposicional puede simbolizarse del modo siguiente,

$$(A, P(x)), \text{ donde } A \text{ es el dominio.}$$

EJEMPLO 1 Sea la función proposicional $(A, P(x))$, donde

$$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \quad \text{y} \quad P(x): \ x < 3$$

En esta función, al reemplazar la variable x por todos los elementos del dominio A, obtenemos las siguientes seis proposiciones:

1. $P(-1): \ -1 < 3$	(V)	2. $P(0): \ 0 < 3$	(V)
3. $P(1): 1 < 3$	(V)	4. $P(2): \ 2 < 3$	(V)
5. $P(3): \ 3 < 3$	(F)	6. $P(4): \ 4 < 3$	(F)

DEFINICION Sea $(A, P(x))$ una función proposicional. Se llama **dominio de verdad** de esta función proposicional al conjunto formado por todos los elementos a de A tales que $P(a)$ es verdadera.

EJEMPLO 2 Sea la función proposicional $(\mathbb{Z}, Q(x))$, donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros y $Q(x) : x^2 \leq 5$

El dominio de verdad de esta función proposicional es el conjunto:

$$\{-2, -1, 0\ 1, 2\}.$$

Si $(A, P(z))$ es una función proposicional, entonces para cada elemento a del dominio A tenemos asignada la proposición $P(a)$. Esta observación nos dice que aquí tenemos una función. A este hecho se debe el nombre dado de **"función proposicional"**.

Debemos hacer notar que las funciones proposicionales pueden ser de más de una variable. En este caso, para cada variable se debe asignar a un conjunto como su dominio. Así, una función proposicional de dos variables se representará mediante una tríada

$$(A, B, P(x, y)),$$

donde $P(x, y)$ es un juicio declarativo que tiene las variables x e y, A es el dominio de x y B es el dominio de y. En este caso, el dominio de verdad está formado por todos los pares ordenados (a, b) tales que $P(a, b)$ es verdad, donde a está en A y b está en B. Con más exactitud, el dominio de esta función proposicional es el producto cartesiano $A \times B$, de los conjuntos A y B, del cual nos ocuparemos en el próximo capítulo.

EJEMPLO 3 Sea la función proposicional $(A, B, P(x, y))$, donde

$$A = \{-1, 0, 1\}, \quad B = \{2, 3\} \quad \text{y} \quad P(x, y) : x + y = 2$$

Esta función proposicional da lugar a las siguientes 6 proposiciones:

1. $P(-1, 2) : -1 + 2 = 2$ (F) 2. $P(0, 2) : \quad 0 + 2 = 2$ (V)

3. $P(1, 2) : \quad 1 + 2 = 2$ (F) 4. $P(-1, 3) : -1 + 3 = 2$ (V)

4. $P(0, 3) : \quad 0 + 3 = 2$ (F) 6. $P(1, 3) : \quad 1 + 3 = 2$ (F)

El dominio de verdad es el conjunto:

$$\{(0, 2),\ (-1, 3)\}.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.1

Hallar el dominio de verdad da cada una de las siguientes funciones proposicionales:

1. $(A, P(x))$, donde $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $P(x)$: $2x < 6$

2. $(B, Q(x))$, donde $B = \{0, 1, 2, 3\}$ y $Q(x)$: $x^2 - x = 6$

3. $(\mathbb{N}, P(x))$, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de números naturales y $P(n)$: $n^2 < 1$.

4. $(C, S(y))$, donde $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $S(y) : y + y^2$ es impar

3. $(\mathbb{R}, P(x))$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales y $P(x)$: $x^2 + 1 = 0$.

6. $(\mathbb{Z}, Q(n))$, donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de números enteros y $Q(n)$: $|n| \leq 2$.

7. $(A, P(x))$, donde $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ y $P(x) : x^2 + 2x < 3$.

8. $(B, Q(x))$, donde $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ y $Q(x)$: $|2x + 1| < 3$.

9. $(C, S(x))$, donde $C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ y $S(x)$: $|x + 1| > 3$.

10. $(D, P(x))$, donde $D = \{-3, -2, -1, 0, 2, 3, 4\}$ y $P(x)$: $x^2 + 2x - 8 \geq 0$.

11. $(\mathbb{Z}, Q(x))$, donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de números enteros y $Q(x)$: $\dfrac{x+1}{x-5} < 0$.

12. $(A, B, P(x,y))$, donde $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ y $P(x, y)$: $x + y < -1$.

SECCION 3.2
CUANTIFICADORES

Consideremos una función proposicional $(A, P(x))$. Recordemos que $P(x)$ es una **proposición abierta** que contiene la variable x y A es el **dominio o universo de discurso** para la proposición abierta. El dominio o universo comprende todas las opciones que se le permite tomar a la variable x.

Al reemplazar la variable x de $P(x)$ por elementos de A obtenemos proposiciones verdaderas o falsas. Nos preguntamos ¿Para cuántos elementos de A, $P(x)$ es verdadera?. Como posibles respuestas tenemos:

para **todos** los elementos de A

para **algunos** elementos de A

para **un solo** elemento de A

para **ningún** elemento de A

Los términos **todos, algunos, un solo y ninguno**, por indicar cantidad, son llamados **cuantificadores**. De estos, los fundamentales son **todos, algunos** y, como caso particular de este último, **un solo**.

EL CUANTIFICADOR UNIVERSAL

El cuantificador **todos** se llama **cuantificador universal** y se le denota con el símbolo $\forall$, que es una A invertida (de "all", palabra inglesa para "todos").

Al cuantificar a la función proposicional $P(x)$ mediante el cuantificador universal obtenemos la proposición:

Para todo elemento x de A, $P(x)$,

que se simboliza del modo siguiente:

$$(\forall x \in A)(P(x)) \qquad (1)$$

A las proposiciones que tienen esta forma se las **proposiciones universales**.

Otras maneras de leer la proposición (1), son las siguientes:

a. Para cada x en A, $P(x)$ **b.** Cualquiera sea x en A, $P(x)$

c. $P(x)$, para cada x en A **d.** $P(x)$, para todo x en A.

$(\forall x \in A)(P(x))$ es verdadera si y sólo si $P(a)$ es verdadera para todo a de A. Esto es, $(\forall x \in A)(P(x))$ es verdadera si y sólo si el dominio de verdad $P(x)$ es todo A.

NOTACION A la proposición cuantificada

$$(\forall x \in A)(P(x)),$$

cuando el universo del discurso A está sobreentendido o es dado de antemano, la escribimos así:

$$(\forall x)(P(x)) \text{ ó, más simplemente, } \forall x\, P(x)$$

EJEMPLO 1 Simbolizar las siguientes proposiciones y determinar su valor lógico.

a. Todo hombre es mortal

b. Todo número natural es mayor que 1.

Solución

a. Sea la función proposicional $M(x)$: x es mortal con dominio el conjunto S formado por todos los seres humanos.

Esta proposición dada se escribe simbólicamente así: $(\forall x \in S)(M(x))$.

Esta proposición es verdadera.

b. Esta proposición se escribe simbólicamente así: $(\forall n \in \mathbb{N})(n > 1)$.

La proposición es falsa, ya que para $n = 1$ no es cierto que $1 > 1$.

LAS PROPOSICIONES UNIVERSALES GENERALIZAN LA CONJUNCION.

En efecto, supongamos que el dominio de la función proposicional $(A, P(x))$ es un conjunto finito, formado por los elementos: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Es decir,

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Tenemos que:

$$(\forall x \in A)(P(x)) \text{ es verdadera } \Leftrightarrow P(a_1), P(a_2), \ldots \text{ y } P(a_n) \text{ son todas verdaderas.}$$
$$\Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n) \text{ es verdadera.}$$

Luego,

$$(\forall x \in A)(P(x)) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n).$$

EL CUANTIFICADOR EXISTENCIAL

El cuantificador **algunos** o **existe al menos uno** se llama **cuantificador existencial**, y se le denota con el símbolo $\exists$, que es una E al revés.

A la proposición:

Existe al menos un x de A tal que $P(x)$

la escribiremos simbólicamente del modo siguiente:

$$(\exists x \in A)(P(x)) \qquad (2)$$

y, cuando el universo de discurso A está sobreentendido, la escribiremos así:

$$(\exists x)(P(x)), \text{ o más simplemente, } \exists x\, P(x).$$

A las proposiciones que tienen esta forma la llamaremos **proposiciones existenciales**.

Otras maneras de leer la proposición (2) son las siguientes:

a. Para algún x en A, $P(x)$.

b. Existe un x en A tal que $P(x)$.

c. $P(x)$, para algún x en A.

$(\exists x \in A)(P(x))$ es verdadera si y sólo si $P(x)$ es verdadera al menos para un x de A.

Esto es,

$(\exists x \in A)(P(x))$ es verdadera si y sólo si el dominio de verdad de $P(x)$ es no vacío.

EJEMPLO 2 Simbolizar las siguientes proposiciones y determinar su valor lógico.

a. Algunos hombres son genios.

b. Existe un número natural mayor que 1.

c. Existe un número real cuyo cuadrado es negativo.

Solución

a. Sea la función proposicional $G(x)$: x es un genio con dominio S el conjunto formado por todos los seres humanos.
La proposición dada se simboliza así: $(\exists x \in S)(G(x))$

Esta proposición es verdadera.

b. "Existe un número natural mayor que 1" se simboliza así: $(\exists n \in \mathbb{N})(n > 1)$

Esta proposición es verdadera, ya que $2 \in \mathbb{N}$ y $2 > 1$

c. "Existe un número real cuyo cuadrado es negativo" se simboliza: $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 < 0)$.

Esta proposición es falsa, ya que el cuadrado de todo número real es mayor o igual a 0.

LAS PROPOSICIONES EXISTENCIALES GENERALIZAN LA DISYUNCION.

En efecto. Suponemos nuevamente que A es finito. Esto es,

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Tenemos que:

$(\exists x \in A)(P(x))$ es verdadera $\Leftrightarrow$ al menos una: $P(a_1)$, $P(a_2)$, . . .ó $P(a_n)$, es verdadera.

$\Leftrightarrow$ $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$ es verdadera.

Luego,

$$(\exists x \in A)(P(x)) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$$

CUANTIFICADOR EXISTENCIAL DE UNICIDAD

Como un caso particular del cuantificador existencial "existe al menos uno" tenemos el cuantificador: **existe un único** o **existe sólo uno,** que es llamado **cuantificador existencial de unicidad,** y lo simbolizaremos así: $\exists!$. La expresión

$$(\exists! x \in A)(P(x)) \qquad (3)$$

se leerá de cualquiera de las siguientes formas:

a. Existe un único x en A tal que $P(x)$.

b. Existe un sólo un x en A tal que $P(x)$.

c. Existe uno y sólo un x en A tal que $P(x)$

d. $P(x)$, para un único x en A.

La proposición (3) es verdadera si y sólo si el dominio de verdad de $(A, P(x))$ es un conjunto unitario, esto es, si y sólo si $P(x)$ es verdadero para un único x en A.

EJEMPLO 3 Simbolizar las siguientes proposiciones y determinar su valor lógico.

a. Existe un único número natural que sumado a 2 da 5.

b. Existe sólo un número real tal que su cuadrado es 4

c. Existe un único número real tal que su cuadrado es –4.

Solución.

a. $(\exists! n \in \mathbb{N})(2 + n = 5)$. Verdadera. Sólo el número 3 cumple con $2 + 3 = 5$.

b. $(\exists! x \in \mathbb{R})\ (x^2 = 4)$. Falsa. $x = 2$ y $x = -2$ cumplen con $x^2 = 4$

c. $(\exists! x \in \mathbb{R})\ (x^2 = -4)$. Falsa. No existe ningún número real cuyo cuadrado sea –4.

REGLAS DE LA NEGACION DE CUANTIFICADORES

Las dos leyes de De Morgan nos proporcionan las relaciones entre la negación, la conjunción y la disyunción. Como las proposiciones universales y existenciales son generalizaciones de la conjunción y disyunción, respectivamente, es de esperar que las leyes tengan sus respectivas generalizaciones. Efectivamente, así sucede y a estas generalizaciones se les conoce con el nombre de **teoremas de De Morgan** o **reglas de la negación de cuantificadores**. Estos dicen lo siguiente:

1. $\sim[(\forall x \in A)(P(x))] \equiv (\exists x \in A)(\sim P(x))$

2. $\sim[(\exists x \in A)(P(x))] \equiv (\forall x \in A)(\sim P(x))$

En palabras, estas reglas nos dicen que para negar una proposición con cuantificadores se cambia el cuantificador, de universal a existencial o de existencial a universal, y se niega la proposición cuantificada.

Verifiquemos la veracidad de estas reglas. Tomemos la regla 1.

$$\begin{aligned} \sim[(\forall x \in A)(P(x))] \text{ es verdadera } &\Leftrightarrow (\forall x \in A)(P(x)) \text{ es falsa.} \\ &\Leftrightarrow \text{Para algún } a \text{ de } A,\ P(a) \text{ es falsa} \\ &\Leftrightarrow \text{Para algún } a \text{ de } A,\ \sim P(a) \text{ es verdadera} \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in A)(\sim P(x)) \text{ es verdadera.} \end{aligned}$$

Esto es, $\sim[(\forall x \in A)(P(x))] \equiv (\exists x \in A)(\sim P(x))$, que es lo que afirma la regla 1.

La regla 2 se prueba en forma similar (Ver el problema propuesto 9).

Para el caso particular en el que el universo del discurso A sea finito, estas reglas se demuestran a partir de las leyes de De Morgan. En efecto, si los elementos de A son: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces

$$\begin{aligned} \sim[(\forall x \in A)(P(x))] &\equiv \sim[P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)] \\ &\equiv \sim P(a_1) \vee \sim P(a_2) \vee \ldots \vee \sim P(a_n) \\ &\equiv (\exists x \in A)(\sim P(x)) \end{aligned}$$

En forma similar se obtiene la segunda regla.

EJEMPLO 4 Usando las reglas de la negación de cuantificadores, hallar la negación de las siguientes proposiciones:

a. $(\exists n \in \mathbb{N})(n^2 = n)$

b. $(\forall x \in \mathbb{R})(x > 2 \rightarrow x^2 > 3)$

Solución

a. $\sim[(\exists n \in \mathbb{N})(n^2 = n)] \equiv (\forall n \in \mathbb{N})(\sim(n^2 = n)) \equiv (\forall n \in \mathbb{N})\ (n^2 \neq n)$

b.
$$\begin{aligned} \sim[(\forall x \in \mathbb{R})(x > 2 \rightarrow x^2 > 3)] &\equiv (\exists x \in \mathbb{R})\ \sim(x > 2 \rightarrow x^2 > 3) \\ &\equiv (\exists x \in \mathbb{R})\ \sim(\sim[x > 2] \vee [x^2 > 3]) \quad \text{(Ley del condi.)} \\ &\equiv (\exists x \in \mathbb{R})([x > 2] \wedge \sim[x^2 > 3]) \\ &\equiv (\exists x \in \mathbb{R})(x > 2 \ \wedge\ x^2 \leq 3) \end{aligned}$$

PRUEBA POR CONTRAEJEMPLO

Para demostrar la **falsedad** de una proposición universal,

$$(\forall x \in A)(P(x)),$$

se usa el método del **contraejemplo**.

La primera regla de la negación de cuantificadores dice que:

$$\sim[(\forall x \in A)(P(x))] \equiv (\exists x \in A)(\sim P(x))$$

En consecuencia, probar que $(\forall x \in A)(P(x))$ es falsa es equivalente a probar que $(\exists x \in A)(\sim P(x))$ es verdadera. O sea, es equivalente a probar que:

Existe un elemento a de A tal que ~P(a) es verdadera.

Este elemento ***a*** recibe el nombre de **contraejemplo** para la proposición universal:

$$(\forall x \in A)(P(x)).$$

EJEMPLO 5 Probar, con un contraejemplo, que la siguiente proposición es falsa,

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x < x^2).$$

Solución

Un contraejemplo para la proposición anterior es $x = 1$. En efecto, $1 \geq 1^2$.

Otro contraejemplo es $x = \frac{1}{2}$, ya que se cumple que

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

EJEMPLO 6 El famoso matemático francés **Pierre de Fermat** (1601–1665) hizo la conjetura de que el la siguiente expresión $2^{2^n} + 1$, reemplazando a n por cualquier número natural, proporciona números primos. Es decir, Fermat conjeturó que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(2^{2^n} + 1 \text{ es primo}\right)$$

Para $n = 0, 1, 2, 3$ y 4, la expresión dada nos da siguientes números: 2, 5, 5, 17, 257 y 65537. No es difícil verificar que, efectivamente, estos números son primos.

Leonardo Euler (1707–1783), famoso matemático suizo, encontró que

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297$$

puede ser factorizado del modo siguiente:

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = (641)(6700417),$$

Con este resultado, Euler probó que la conjetura de Fermat es falsa. Euler había encontrado que $n = 5$ es un contraejemplo para la conjetura.

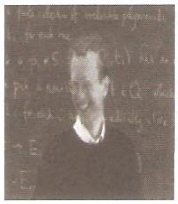
¿SABIAS QUE . . .

PIERRE de FERMAT (1,601–1.665) *nació en Beaumont de Lomagne, Francia. Tuvo como profesión el derecho y como pasión, la matemática. Es uno de los matemáticos más distinguidos del siglo XVII. Comparte con* ***René Descartes****, la creación de la* ***geometría analítica*** *y con* ***Blaise Pacal****, la creación de las bases de la teoría de* ***probabilidades****. Femat formuló lo que fue el el más famoso problema no resuelto de la matemática, él cual se conoce ahora con el nombre de* ***El último teorema de Fermat.*** *En 1.637, él aseguró que la ecuación:*

Pierre Fermat

$$x^n + y^n = z^n,\ n > 2$$

no tiene soluciones enteras no triviales. Esta conjetura desafió al ingenio matemático por más de 300 años. Lo curioso de la historia es la conjetura la escribió en el margen de un ejemplar del libro ***Aritmética*** *matemático griego* ***Diofanto de Alejandría (200–284).*** *Allí aseguró que él tenía la prueba, pero que no la es escribió por falta de espacio. La conjetura recién fue probada en 1.995 por el matemático británico* ***Andrew Wiles.***


Andrew Wiles

LEONARDO EULER (1.707–1.783) *Nació en Basilea, Suiza. Es considerado el matemático más prólifico de la historia.Tiene contribuciones notables en ecuaciones diferenciales, teoría de números, cálculo de variaciones, teoría de grafos, , etc. Su producción total consiste en alrededor de 886 trabajos, que recopilados constituirían 80 libros de buen volumen.*

Leonardo Euler

PROPOSICIONES CON DOS O MAS CUANTIFICADORES

Es común encontrar proposiciones con más de un cuantificador. Así, la ley conmutativa y la ley asociativa de la suma de números reales son dos ejemplos importantes de proposiciones de dos y tres cuantificadores, respectivamente. Estas dicen:

a. Ley conmutativa: $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = y + x)$.

b. Ley asociativa: $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})((x + y) + z = x + (y + z))$.

En nuestros textos de cálculo, el universo del discurso es el conjunto $\mathbb{R}$. Por esta razón, en estos textos, estas leyes vienen expresadas simplemente así:

a. $\forall x\ \forall y,\ x + y = y + x$ **b.** $\forall x\ \forall y\ \forall z,\ (x + y) + z = x + (y + z)$

En una proposición de 2 o más cuantificadores, el orden en que aparecen es de capital importancia. El cuantificador de la izquierda considera como una sola proposición a lo que queda a su derecha. En otras palabras, los cuantificadores se leen de izquierda a derecha. Así, en una función proposicional de dos variables $(A, B, P(x, y))$ se establece que:

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)(P(x, y)) = (\forall x \in A)[(\exists y \in B)(P(x, y))],$$

y en una de tres variables $(A, B, C, P(x, y, z))$:

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)(\forall z \in C)(P(x, y, z)) = (\forall x \in A)\{(\exists y \in B)[(\forall x \in C)(P(x, y, z)]\}$$

Al cuantificar una función proposicional de dos variables, $(A, B, P(x, y))$, donde A es el universo de la variable x y B es el de la variable y, se obtienen las ocho proposiciones siguientes:

1. $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(P(x, y))$ **2.** $(\forall y \in B)(\forall x \in A)(P(x, y))$

3. $(\forall x \in A)(\exists y \in B)(P(x, y))$ **4.** $(\exists y \in B)(\forall x \in B)(P(x, y))$

5. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(P(x, y))$ **6.** $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(P(x, y))$

7. $(\exists x \in A)(\exists y \in B)(P(x, y))$ **8.** $(\exists y \in B)(\exists y \in A)(P(x, y))$

Observar que cada proposición de la derecha se obtiene conmutando los cuantificadores (con sus respectivas variables) de la correspondiente proposición de la izquierda. Nos preguntamos si cada par de estas proposiciones son equivalentes. La respuesta es afirmativa sólo en el caso que los cuantificadores son iguales, es decir:

$$\boxed{\begin{gathered}(\forall x \in A)(\forall y \in B)(P(x, y)) \equiv (\forall y \in B)(\forall x \in A)(P(x, y)) \\ \text{y} \\ (\exists x \in A)(\exists y \in B)(P(x, y)) \equiv (\exists y \in A)(\exists y \in B)(P(x, y))\end{gathered}}$$

Cuando los dos cuantificadores son distintos, al conmutar los cuantificadores obtenemos, en general, dos proposiciones diferentes, como lo muestran los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 7 Sea $(F, H, M(x, y))$, donde F es el conjunto de todas las mujeres, H es el conjunto de los seres humanos, y

$$M(x, y) : x \text{ es madre de } y$$

Las siguientes proposiciones no son equivalentes.

a. $(\forall y \in H)(\exists x \in F)(M(x, y))$ **b.** $(\exists x \in F)(\forall y \in H)(M(x, y))$

En efecto, teniendo en cuenta que los cuantificadores se leen de izquierda a derecha, vemos que:

En la proposición **a,**

$$(\forall y \in H)(\exists x \in F)(M(x, y)) \equiv (\forall y \in H)[(\exists x \in F)(M(x, y))],$$

el primer cuantificador es el universal y el segundo es el existencial. Esta proposición nos dice que para todo ser humano y, $(\exists x \in F)(M(x, y))$. Esto es, para todo ser humano existe una mujer que es su madre. O sea, en pocas palabras, todo ser humano tiene una madre. Sin duda, esta proposición es verdadera.

En la proposición **b,**

$$(\exists x \in F)(\forall y \in H)(M(x, y)) \equiv (\exists x \in F)[(\forall y \in H)(M(x, y))],$$

el primer cuantificador es el existencial y el segundo es el universal. Esta proposición dice que existe una mujer, digamos x_0, tal que $(\forall y \in H)(M(x_0, y))$. Esto es, existe una mujer x_0 tal que x_0 es madre de todo ser humano. Esto es falso.

EJEMPLO 8 Sea $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Verificar que las siguientes proposiciones no son equivalentes:

a. $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 1)$ **b.** $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}^*)(xy = 1)$

Solución

a. En la proposición $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 1) \equiv (\forall x \in \mathbb{R}^*)[(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 1)]$, el primer cuantificador es el universal y el segundo es el existencial. Esta proposición nos dice que para todo real $x \neq 0$, $(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 1)$. Esto es, existe un real y tal que $xy = 1$.

Esta proposición es verdadera, ya que una vez seleccionado cualquier $x \neq 0$, existe el real $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, él cual satisface $xy = x\,x^{-1} = x\frac{1}{x} = 1$.

El lector debe recordar que esta proposición es, precisamente, la ley del inverso multiplicativo de los números reales.

b. En la proposición $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}^*)(xy = 1) = (\exists y \in \mathbb{R})[(\forall x \in \mathbb{R}^*)(xy = 1)]$, el primer cuantificador es el existencial, el cual nos dice que existe un elemento particular, digamos b, que cumple

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*)(xb = 1) \quad \text{o, equivalentemente,} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*)\left(x = \frac{1}{b}\right).$$

Esto último nos está asegurando que los números reales distinto de cero son todos iguales al número $\frac{1}{b}$, lo cual es obviamente falso.

El siguiente ejemplo nos ilustra como negar proposiciones que tienen dos cuantificadores.

EJEMPLO 9. Hallar una proposición equivalente a la negación de la proposición:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$$

Solución

$$\begin{aligned}
\sim[(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)] &\equiv \sim[(\forall x \in \mathbb{R})\{(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)] \\
&\equiv (\exists x \in \mathbb{R}) \sim\{(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)\} \\
&\equiv (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \sim(x + y = 0) \\
&\equiv (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y \neq 0).
\end{aligned}$$

PROBLEMAS RESUELTOS 3.2

PROBLEMA 1 Simbolizar las proposiciones dadas y determinar su valor lógico.

a. Todos los números enteros son números reales.

b. Ningún número entero es real.

c. *Algunos números enteros son reales.*

d. Algunos números enteros no son reales.

e. Ningún entero par es divisible entre 3.

f. Si un entero es par y es un cuadrado perfecto, entonces es divisible entre 4.

Solución

Sean $E(n)$: n es un número entero

$P(n)$: n es par.

$T(n)$: n es divisible entre 3.

$R(x)$: x es un número real.

$C(n)$: n es cuadrado perfecto.

$D(n)$: n es divisible entre 4.

a. La proposición es verdadera y se puede simbolizar de dos formas:

i) $(\forall n \in \mathbb{Z})\,(R(n))$, **ii)** $(\forall n)(E(n) \rightarrow R(n))$

b. La proposición es falsa y se puede simbolizar de dos formas:

i) $(\forall n \in \mathbb{Z})(\sim R(n))$. **ii)** $(\forall n)(E(n) \rightarrow \sim R(n))$

c. La proposición es verdadera y se puede simbolizar de dos formas:

i) $(\exists n \in \mathbb{Z})(R(n))$ **ii)** $(\exists n)(E(n) \wedge R(n))$

d. La proposición es falsa y se puede simbolizar de dos formas:

i) $(\exists n \in \mathbb{Z})(\sim R(n))$ **ii)** $(\exists n)(E(n) \wedge \sim R(n))$.

e. La proposición es falsa y se simboliza así:

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(P(n) \rightarrow \sim T(n))$$

f. La proposición es verdadera y se simboliza así:

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(P(n) \wedge C(n) \rightarrow D(n))$$

PROBLEMA 2 Negar las siguientes proposiciones:

a. $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 1 = 0)$

b. $(\forall x \in \mathbb{N})(x^3 \neq x)$

c. $(\exists x)(\forall y)(xy = 1)$

d. $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(x^2 + y^2 = z)$

Solución

a. $\sim[(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 1 = 0)] \equiv (\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 1 \neq 0)$

b. $\sim[(\forall x \in \mathbb{N})(x^3 \neq x)] \equiv (\exists x \in \mathbb{N})(x^3 = x)$

c. $\sim[(\exists x)(\forall y)(xy = 1)] \equiv (\forall x)(\exists y)(xy \neq 1)$

d. $\sim[(\forall x)(\exists y)(\forall z)(x^2 + y^2 = z)] \equiv (\exists x)(\forall y)(\exists z)(x^2 + y^2 \neq z)$

PROBLEMA 3 Sea la proposición:

Si todas las balas fueron disparadas, entonces algunas balas dieron en el objetivo.

a. Simbolizar esta proposición

b. Hallar la proposición contrarrecíproca.

Solución

Sea B el conjunto formado por las balas disponibles, y sean

$D(x)$: x fue disparada, $O(x)$: x dio en el objetivo.

a. $[(\forall x \in B)(D(x))] \rightarrow [(\exists x \in B)(O(x))]$

b. $\sim[(\exists x \in B)(O(x))] \rightarrow \sim[(\forall x \in B)(D(x))]$ o, equivalentemente,

$[(\forall x \in B)(\sim O(x))] \rightarrow [(\exists x \in B)(\sim D(x))]$.

En el lenguaje usual, esta última proposición dice: si ninguna bala dio en el objetivo, entonces algunas balas no fueron disparadas.

PROBLEMA 4 Hallar un contraejemplo para cada una de las proposiciones siguientes:

a. $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x > 15)$

b. $(\forall x \in \mathbb{R})\left(\sqrt[3]{x} \leq x\right)$

c. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\left(\sqrt{x^2 + y^2} = x + y\right)$

d. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(x^n > x)$

Solución

a. Contraejemplo: $x_o = 1$. En efecto, tenemos que $1^2 + 1 \leq 15$

b. Contraejemplo: $x_o = \frac{1}{8}$. En efecto, tenemos que $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$

c. Como la negación de **c** es $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\left(\sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y\right)$.

Un contraejemplo para esta proposición es un par de números reales x_o e y_o que cumpla con la expresión $\sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y$

Un contraejemplo es $x_o = 3$, $y_o = 4$. En efecto, Puesto que $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, tenemos que $\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4 = 7$.

d. La negación de **d** es $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(x^n \leq x)$

Un contraejemplo para la proposición es $x_o = 1$. En efecto, tenemos

$$(\forall n \in \mathbb{N})(1^n \leq 1)$$

PROBLEMA 5 Probar que las siguientes proposiciones no son equivalentes.

a. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(n < m)$ **b.** $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n < m)$

Solución

a. La proposición $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(n < m)$ es verdadera.

En efecto, dado cualquier natural n, existe el natural $m = n + 1$ y es tal que

$$n < n + 1 = m.$$

b. La proposición $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n < m)$ es falsa.

En efecto, ella dice que existe un natural m_0 (fijo) tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n < m_0)$$

Esta última proposición asegura que todos los números naturales son menores que el natural m_0. Esto no es cierto, ya que si tomamos $n = m_0$, obtenemos la contradicción $m_0 < m_0$.

PROBLEMA 6 En los textos de cálculo aparece la siguiente definición de límite de una función:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo x en el dominio de f,

si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

a. Simbolizar esta definición usando la letra D para representar el dominio de f.

b. Expresar simbólicamente que $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$

Solución

a. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)$

En forma más sintética, tomando como universo del discurso el dominio D de la función f, esta definición se simboliza así:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\ (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon).$$

b. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$

$$\Leftrightarrow \sim[(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)((0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)]$$

$$\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D) \sim(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D) \sim(\sim[0 < |x - a| < \delta] \vee [|f(x) - L| < \varepsilon])$$

$$\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)\ (\exists x \in D)([0 < |x - a| < \delta] \wedge \sim[|f(x) - L| < \varepsilon])$$

$$\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D)(0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon).$$

En forma simplificada:

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq L \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D\ (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon).$$

PROPBLEMAS PROPUESTOS 3.2

1. Escribir simbólicamente cada una de las siguientes proposiciones. Para las proposiciones abiertas correspondientes, usar las notaciones que se sugieren.

   a. Todos los hombres son inteligentes. ($H(x)$, $I(x)$).

   b. Ningún hombre es inteligente. ($H(x)$, $I(x)$).

la siguiente definición de límite

todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$|f(x) - L| < \varepsilon$

la letra D para representar

$\lim_{x \to a} f(x) \neq L$

$|x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)$

del discurso el dominio D de la

$|x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)$.

$-a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)]$

$a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)$

$-a| < \delta] \vee [|f(x) - L| < \varepsilon])$

$a| < \delta] \wedge \sim[|f(x) - L| < \varepsilon])$

$< \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$.

$|x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$.

UESTOS 3.2

guientes proposiciones. Para las notaciones que se sugieren.

$I(x)$).

c. Algunos hombres son inteligentes. ($H(x)$, $I(x)$)

d. Algunos hombres no son inteligentes. ($H(x)$, $I(x)$)

e. Todos los perros tienen cola. ($P(x)$, $C(x)$)

f. No todo me pertenece. ($P(x)$)

g. Todo es temporal. ($T(x)$)

h. Nada es perfecto. ($P(x)$)

i. Hay algo bello. ($B(x)$)

j. Algunos estudiantes son puntuales y trabajadores. ($E(x)$, $P(x)$, $T(x)$)

k. No es cierto que todos los caminos conducen a Roma. ($C(x)$, $R(x)$)

l. Todos los invitados han venido. ($I(x)$, $V(x)$)

m. No todo lo que brilla es oro. ($B(x)$, $O(x)$).

2. Hallar, en el lenguaje usual, la negación de las siguientes proposiciones:

a. Nada es perfecto **b.** Todo es temporal

c. Algo falta **d.** Algo no es correcto

3. Simbolizar las siguientes proposiciones y determinar su valor lógico. Usar las funciones proposicionales siguientes:

$P(x)$: x es un número primo. $Q(x)$: x es racional.

$C(x)$: x es un complejo $I(x)$: x es irracional.

$R(x)$: x es real. $A(x)$: x es par.

$E(x)$: $x^2 + 1 = 0$

a. Todos los números racionales son números reales.

b. Algunos números reales no son racionales.

c. Ningún número irracional es racional.

d. Ningún número primo es par.

e. Algunos números complejos son primos.

f. $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales.

4. Usando la notación sugerida entre paréntesis, simbolizar y hallar la proposición contrarrecíproca de:

a. Si todo lo que brilla es oro, entonces el sol es oro ($B(x)$, s).

b. Si todo es rojo, entonces algo es rojo ($R(x)$).

5. *Determinar el valor lógico de las siguientes proposiciones:*

a. $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + 1 = 0)$ **b.** $(\exists x \in \mathbb{R})(10^x = 2)$

c. $(\forall n \in \mathbb{Z})(2^n > 0)$

d. $(\forall x \in \mathbb{Q})(x^2 > 0)$

e. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x^2 + y^2 \geq 0)$

f. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x^3 + y < 0)$

g. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y^2 + 1 = x)$

h. $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(\exists z \in \mathbb{R})(2x + 3y = z)$

6. Negar los siguientes enunciados:

a. $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(xyz = 2)$

b. $(\exists x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$

7. Si $A = \{-1, -2, 3\}$ y $B = \{4, 5, 7\}$, hallar un contraejemplo para cada una de las siguientes proposiciones:

a. $(\forall x \in B)(x \text{ es primo})$

b. $(\forall x \in A)(|x| = x)$

c. $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(y - x < 1)$

d. $(\forall x \in A)(\exists y \in B)(-7 < xy < 0)$

8. Las siguientes proposiciones abiertas tienen por universo el conjunto formado por todos los polígonos.

$A(x)$: x tiene todos sus ángulos internos iguales.

$R(x)$: x es un rectángulo.

$C(x)$: x es un cuadrado.

$E(x)$: x es un triángulo equilátero.

$L(x)$: x tiene todos sus lados iguales.

$B(x)$: x es un rombo.

$T(x)$: x es un triángulo

Traducir al leguaje diario las siguientes proposiciones. Dar su valor lógico.

a. $(\forall x)(C(x) \rightarrow R(x))$

b. $(\forall x)(B(x) \wedge A(x) \rightarrow C(x))$

c. $(\exists x)(L(x) \wedge \sim C(x))$

d. $(\forall x)(C(x) \leftrightarrow A(x) \wedge L(x))$

e. $(\forall x)(A(x) \rightarrow E(x) \veebar C(x))$

f. $(\forall x)(T(x) \rightarrow (A(x) \leftrightarrow L(x)))$

9. Verificar la veracidad de la segunda regla de la negación de cuantificadores:

$$\sim[(\exists x \in A)(P(x))] \equiv (\forall x \in A)(\sim P(x))$$

10. Usando las reglas de negación de cuantificadores, probar que:

a. $\sim[(\forall x \in A)(\sim P(x))] \equiv (\exists x \in A)(P(x))$

b. $\sim[(\exists x \in A)(\sim P(x))] \equiv (\forall x \in A)(P(x))$

11. Negar las siguientes definiciones de límite:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L \Leftrightarrow (\forall\ \varepsilon>0)(\exists\ N>0)(\forall\ x\in D)(x>N \to |f(x)-L|<\varepsilon)$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L \Leftrightarrow (\forall\ \varepsilon>0)(\exists\ N<0)(\forall\ x\in D)(x<N \to |f(x)-L|<\varepsilon)$.

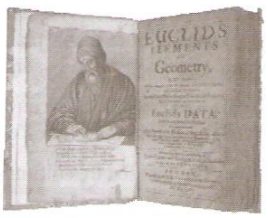
c. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall\ M>0)(\exists\ \delta>0)(\forall\ x\in D)(0<|x-a|<\delta \to f(x)>M)$

d. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty \Leftrightarrow (\forall\ M<0)(\exists\ \delta>0)(\forall\ x\in D)(0<|x-a|<\delta \to f(x)<M)$

SECCION 3.3

EL METODO AXIOMATOCO

El método axiomático fue introducido por los griegos hace más de dos mil años. Euclides, en su monumental obra **Elementos**, hizo uso extensivo de este método para presentar a la Geometría. Los **Elementos** fue escrito alrededor del año 300 A. C. y dominó el pensamiento geométrico, por muchos siglos. Después de la Biblia, es la obra más editada y se considera que es libro que ha tenido mayor influencia en el pensamiento científico.



Euclides comenzó los Elementos presentando una lista de pocas proposiciones, cuya veracidad las acepta sin el requisito de una demostración. Estos son los postulados o axiomas. Partiendo de estas pocas proposiciones, logró deducir lógicamente (demostró) 465 proposiciones (teoremas), con lo que logró sistematizar los conocimientos geométricos de su tiempo (Geometría Euclideana).

El mérito de los **Elementos** radica, además de su contenido matemático, en la forma axiomática de su desarrollo.

Actualmente el uso del método axiomático se ha extendido no sólo a las diferentes ramas de la matemática, sino también hacia otras ciencias, como la física, economía, etc. En lo que sigue haremos una exposición breve de los aspectos esenciales de este método.

En cualquier teoría es absolutamente necesario contar con definiciones precisas de los conceptos que se usan. Sería ideal que todos los conceptos de la teoría fueran definidos; pero esto es una misión imposible de lograr. Un concepto se define por medio de otros, y estos otros por medio de otros más anteriores. Si continuamos

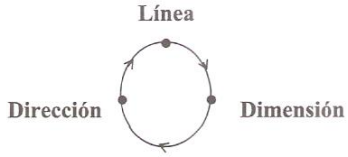
definiendo, pronto llegaremos a un circulo vicioso. Esto es lo que les sucede a los diccionarios en su afán de definir todas las palabras de un idioma. He aquí un ejemplo tomado del Pequeño Larousse Ilustrado:

Línea. La extensión considerada en la **dimensión** de la longitud.

Dimensión. Cada una de las tres **direcciones** en que se mide la extensión de un cuerpo.

Dirección. **Línea** de movimiento de un cuerpo.

Observamos que después de dos pasos hemos regresado a la palabra inicial que se quería explicar.



Para evitar estos círculos viciosos, se escogen convenientemente algunos conceptos de la teoría, a los cuales deliberadamente no se los define. Estos conceptos son los **términos primitivos** o **términos no definidos** de la teoría. Los términos primitivos pueden ser de distinta naturaleza: elementos, conjuntos, relaciones, operaciones, etc.

Todos los otros términos de la teoría son definidos mediante los términos primitivos, por lo que son llamados **términos definidos**.

Euclides, en los **Elementos**, pretendió definir todos los conceptos geométricos. Este y otros deslices fueron superados por otro famoso matemático, **David Hilbert** (1.862–1.943) quien construyó exitosamente la geometría euclidiana plana sobre la base de cinco términos primitivos, que son los siguientes:

Punto, recta, sobre (un punto sobre una recta), **entre** (un punto entre otros dos) y **congruencia.**

Observe que los tres últimos términos son relaciones.

David Hilbert

Como un ejemplo de término definido se tiene el concepto de **segmento** que se define por medio de los términos primitivos "punto" y "entre":

Definición. Dados dos puntos A y B, se llama **segmento de** A a B al conjunto $\overline{AB}$ formado por todos los **puntos entre** A y B.

La parte fundamental de una teoría está conformada por proposiciones que establecen propiedades de los términos primitivos o definidos. Estas proposiciones deben demostrarse. Pero todas las proposiciones pueden demostrarse. Nuevamente, para evitar círculos viciosos, se escogen algunas proposiciones que, deliberadamente, son aceptadas sin demostración. Estas proposiciones son los **axiomas** o **postulados** de la teoría. Para los griegos, y en particular para Euclides, axioma y postulado tenían significaciones distintas. Para nosotros estas dos palabras son sinónimas.

Hilbert construyó la geometría plana sobre la base de 15 axiomas. He aquí uno de ellos:

Postulado. Existe una y sólo una recta que pasa por cualquier par de puntos distintos dados.

Las proposiciones que son consecuencias lógicas de los axiomas son los **teoremas** de la teoría. En general, un teorema es una proposición de la forma $H \Rightarrow T$. La proposición H es la **hipótesis** y T la **tesis**. Además de la hipótesis y la tesis se distingue una tercera parte, la **demostración**. Se llama así a la secuencia de proposiciones que termina con la tesis (conclusión), donde cada proposición es una hipótesis, un axioma, un teorema previo o una consecuencia lógica de las proposiciones anteriores.

Un **Sistema axiomático** es una teoría desarrollada mediante el método axiomático. Es decir, un sistema axiomático es una teoría desarrollada sobre la base de términos primitivos y axiomas.

Resumiendo la exposición anterior tenemos que un sistema axiomático está conformado por:

1. **Términos Primitivos**
2. **Términos Definidos**
3. **Axiomas o Postulados**
4. **Teoremas**

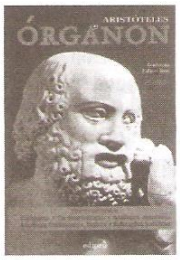
Además de los 4 componentes enumerados hay otra más que generalmente no se menciona, que es la Lógica. Esta nos proporciona las reglas para demostrar los teoremas.

A los términos primitivos, por no ser definidos, se los representa por variables. Al proceder así, los axiomas se convierten en funciones proposicionales, cuyas variables representan términos primitivos. Los teoremas, por ser implicaciones de funciones proposicionales, también son funciones proposicionales.

El cálculo proposicional, que fue materia de esta primera parte de nuestro programa, puede desarrollarse axiomáticamente. Para este caso, generalmente se escogen como términos primitivos a **proposición**, la operación de **negación** y la operación de **disyunción.**

BREVE HISTORIA DE LA LOGICA

*La nacimiento de la **lógica** está intimamente ligada al nacimiento de la filosofía. Su evolución podemos separarla en dos dos etapas importantes. Lógica antigua o clásica y la lógica moderna.*



*En la lógica clásica predomina la obra de Aritóteles (384–322 A. C.) recopilada en el **Órganon** (del griego antiguo οργανον, "método", "instrumento"). Aristóteles define a la lógica como la ciencia que estudia los razonamientos correctos. La noción central de su sistema es el **silogismo**.*

*La lógica aristotélica, al igual que la Geometría de Euclides, dominó el desarrollo de su campo por más de 2.000 años. En el siglo XVIII, el reconocido filósofo alemán **Enmanuel Kant** (1.724–1.804) sostuvo que Aristóteles había desarrollado la lógica a tal perfección sería imposible hacerle modificaciones de importancia.*

*Kant estaba equivocado. En el siglo XIX, el panorama cambia totalmente. Comienza una estrecha relación entre la lógica y la matemática. La lógica es desarrollada empleando un leguaje simbólico como el de la matemática, dando inicio a la **lógica moderna, lógica matemática o lógica simbólica**.*

G. Boole

A. De Morgan

*Los pasos claves fueron dados por los matemáticos ingleses **George Boole** (1.815–1.864) y **Augustus De Morgan** (1.806–1.871). En 1847, Boole publicó un pequeño panfleto de 82 páginas, **The Mathematical Analysis of Logic**. Aquí, Boole presenta en forma sucinta una estructura algebraica que gobierna las leyes lógicas. Esta estructura, que actualmente se llama **álgebra de Boole**, es, en esencia, el álgebra de proposiciones con que hemos ya trabajado. 1.854, presentó sus ideas detalladas en su notable obra **An Investigaction in the Laws of Though, on which are Founded the Mathematical Teories of Logic and Probability**.*

*Los trabajos de Boole fueron complementadas por las ideas de **De Morgan** en su obra **Formal Logic o Calculus of Inference, Necesary and Probable**.*

Durante varias décadas después de la aparición de "The Laws of Thought", los lógicos y algunos matemáticos se dedicaron a dar rigor y extender los resultados de Boole. Destacaron en esta tarea: en USA, ***Ch. Pierce*** *(1.839-1914),* ***E. Huntington*** *(1.874-1.952); en Italia,* ***Giuseppe Peano*** *(1.858-1.832), quien da el nombre de Lógica Matemática a esta nueva lógica; en Alemania,* ***Ernest Schroeder*** *(1.841-1.902) y* ***Gottlob Fregel*** *(1.848-1.925), quien ya nos habla de números cardinales y sostiene que la aritmética es parte de la lógica. Todas estas convergen en la monumental obra* ***Principia Mathematica****, de los ingleses* ***Bertrand Russell*** *(1.872-1.970) y* ***Alfred Whitehead*** *(1.861-1.947). Este es un gran libro, tanto en calidad como en cantidad (2.000 pags.). Apareció en tres volúmenes, en 1.910, 1.912 y 1.913. Con este extraordinario trabajo se da, prácticamente, la configuración general de la lógica matemática.*

A fines del siglo XIX, cuando la lógica matemática estaba en pleno desarrollo, en la teoría de conjuntos, se descubrieron algunas paradojas, o sea proposiciones que son ciertas y falsas al mismo tiempo. Este hecho hizo tambalear al mundo matemático y dio lugar a nueva inquietud, que estaba más allá de los temas propios de la matemática, por lo que se dice ~~que~~ es un tema de la ***metamatemática****. Se trata de determinar si un sistema axiomático es* ***consistente.*** *Un sistema es consistente si en él no hay una proposición p tal que tanto* ***p*** *como* ***~p*** *son ambos teoremas de sistema. En este campo, destacó uno de los matemáticos más influyentes del siglo XX, el alemán* ***David Hilbert*** *(1862–1943) quien probó que la geometría euclidiana es consistente.*

Otro tema importante de la metamatemática es la ***completitud.*** *Un sistema es completo si dada cualquier proposición p en el sistema, o* ***p*** *bien* ***~p*** *es un teorema del sistema. En 1.920,* ***Emil Post*** *(1.897-1.954) demostró que el sistema axiomático de la lógica de enunciados de Principia Mathematica es completa y consistente.*

En 1931, el austriaco ***Kurt Gödel*** *(1.906–1.978) probó un resultado extraordinariamente sorprendente y perturbador, que ahora se conoce con el nombre de* ***Teorema de Gödel****.*

El teorema de ***Gödel*** *afirma que ningún sistema axiomático de la aritmética elemental (teoría de loa números naturales) es completo si éste es consistente. En otros términos, en cualquier sistema axiomático consistente de la aritmética elemental, existe al menos una proposición verdadera sobre números naturales que no puede obtenerse como un teorema dentro del sistema.*

K. Gödel

En el año 1.920 el lógico polaco ***Jan Lukasiewicz*** *(1.878–1.956) construyó una lógica trivalente. En esta lógica a cada proposición se le puede asignar tres valores lógicos; por ejemplo, V (verdadero), F (falso) e I (incierto). Las operaciones veritativas deben definirse combinando estos tres valores. Así, la tabla siguiente define la negación. Aquí hemos representando V por 1, F por 0 e I por 1/2.*

p	$\sim p$
1	0
1/2	1/2
0	1

En 1.960, ***Lotfi Zadeh,*** *profesor de la universidad de California en Berkeley, sentó las bases de una nueva lógica multivalente, llamada* ***Lógica Difusa (Fuzzy Logic)****. Zadeh , en esa época estaba investigando sobre el uso del computador para entender los lenguajes naturales. A las proposiciones, en estos lenguajes, no se les puede asignar fácilmente los valores 0 o 1; o sea, falso o verdadero, sino ciertos valores entre estos dos extremos como: puede que no ocurra, puede ocurrir, probablemente ocurra, etc; a los que se les asigna un valor lógico, que es cualquier número real comprendido entre 0 y 1. Esta nueva lógica ya tiene aplicaciones teóricas y prácticas. Actualmente, muchos investigadores se están ocupando de estudiar las distintas disciplinas científicas a la luz de la nueva lógica. Así, por ejemplo, ya se habla de conjuntos difusos, cálculo difuso, ecuaciones diferenciales difusas, etc. También ya se han visto aplicaciones en los sistemas de expertos y otras ramas de la inteligencia artificial, en la autorregulación de controles industriales*

K. Gödel

p	$\sim p$
1	0
1/2	1/2
0	1

fornia en Berkeley, sentó
a Difusa (Fuzzy Logic).
mputador para entender
guajes, no se les puede
dero, sino ciertos valores
e ocurrir, probablemente
s cualquier número real
aplicaciones teóricas y
upando de estudiar las
Así, por ejemplo, ya se
ferenciales difusas, etc.
ertos y otras ramas de la
dustriales

4

CONJUNTOS

GEORG CANTOR
(1.845-1.918)

4.1 CONJUNTOS Y SUBCONJUNTOS

4.2 UNION E INTERSECCION DE CONJUNTOS

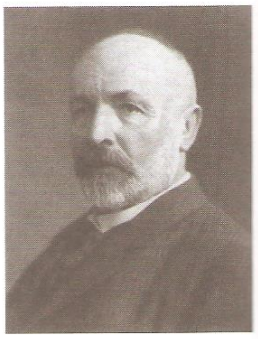
4.3 DIFERENCIA, COMPLEMENTO Y DIFERENCIA SIMETRICA

4.4 PRODUCTO CARTESIANO

4. 5 OPERACIONES GENERALIZADAS

4. 6 REPRESENTACION COMPUTACIONAL DECONJUNTOS

BREVE HISTORIA DE LA TEORIA DE CONJUNTOS



GEORG CANTOR
(1.845-1.918)

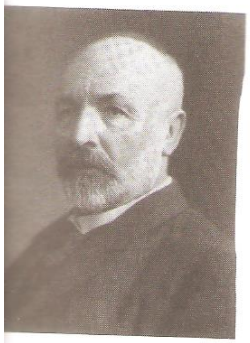
GEORG FERDINAND LUDWIG PHILIPP CANTOR nació en San Petersburgo, Rusia. Su padre fue un próspero comerciante y su madre una artista, ambos de origen judío y nacidos en Dinamarca. En 1.856, la familia completa se mudó a Frankfurt, Alemania.

Georg inició sus estudios de matemática en la Universidad de Zurich y la Universidad de Berlín. Aquí tuvo como profesores a dos gigantes de la matemática, Karl Theodor Weierstrass (1.815-1.897) y Leopold Kronecker (1.823-1.891). Este último, años más tarde, se convirtió en su opositor. En 1.869 lo nombraron profesor de la Universidad de Halle, en donde desarrolló toda su carrera profesional.

Entre 1.874 y 1.897, Cantor creó la teoría de conjuntos, la cual lo mostró como un matemático creativo de extraordinaria originalidad. Revolucionó la matemática con su teoría sobre el infinito, que es considerada como la más original y la más perturbadora contribución a la matemática en los últimos 2.500 años. Sus resultados fueron tan sorprendentes que algunos de sus contemporáneos dudaron de su veracidad. La falta de reconocimiento inicial a sus investigaciones lo afectó anímicamente, convirtiéndolo en un hombre melancólico, depresivo e irritable.

ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

Cantor nace y muere cuando gobernaban Venezuela Carlos Soublette y Juan Vicente Gómez, respectivamente. Entre 1.859 y 1.863, Venezuela sufre la ***Guerra Federal****. En 1.860, Abraham Lincoln es elegido presidente de Estados Unidos. Al año siguiente se inicia la* ***Guerra de Secesión****, entre el Norte y el Sur, que concluye en 1.865. En 1.910 acontece la Revolución Mejicana y en 1.917, la Revolución Rusa. De 1.914 hasta 1.918, Europa sufrió la Primera Guerra Mundial.*



TOR nació en San
y su madre una artista,
la familia completa se

rsidad de Zurich y la
ntes de la matemática,
er (1.823-1.891). Este
lo nombraron profesor
profesional.

ual lo mostró como un
nó la matemática con
más original y la más
00 años. Sus resultados
áneos dudaron de su
estigaciones lo afectó
esivo e irritable.

MPORTANTES

rlos Soublette y Juan
zuela sufre la ***Guerra***
de Estados Unidos. Al
y el Sur, que concluye
7, la Revolución Rusa.
al.

SECCION 4.1

CONJUNTOS Y SUBCONJUNTOS

Entre las diferentes ramas de la matemática moderna, **la teoría de conjuntos** ocupa un lugar especial. Esta teoría apareció alrededor del año 1.870 en los trabajos de **George Cantor** (1.845–1.918), causando una revolución en el mundo matemático. La teoría de conjuntos es el eslabón entre la lógica y la matemática.

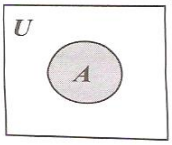
La teoría de conjuntos se construye a partir de tres conceptos básicos que son: **elemento, conjunto** y una relación "$\in$" que llamaremos **relación de pertenencia**. Esta relación enlaza los elementos con los conjuntos. Estos tres conceptos, por ser los primeros, no se pueden definir; sin embargo, daremos una interpretación intuitiva de ellos.

Al término **conjunto** le damos el significado que le da el lenguaje usual, decir como una colección de objetos cualesquiera. Así, el conjunto formado por los números 1, 2, 3, 4; el conjunto formado por los presidentes de Venezuela; etc.

En general, usaremos letras minúsculas, a, b, c, x, y, etc., para representar elementos; y usaremos letras mayúsculas, A, B, C, X, Y, etc., para representar conjuntos. Si x es un elemento del conjunto A, diremos que **x pertenece a A** y lo simbolizaremos así: $x \in A$. Su negación, $\sim(x \in A)$, se simboliza así: $x \notin A$. Esto es, $x \notin A$, significa x no pertenece a A o, lo que es lo mismo, x no es un elemento de A.

CONJUNTO UNIVERSAL

Se llama **conjunto universal, conjunto referencial o universo del discurso**, al conjunto formado por todos los elementos que están en discusión. A éste, generalmente se lo denota con la letra U y gráficamente se lo representa por un rectángulo. Cualquier otro conjunto A es representado por una región cerrada, dentro del rectángulo.

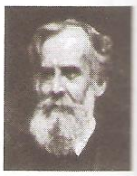


A este tipo de gráficos, que nos ayudan a visualizar conjuntos, se los conoce con el nombre de **diagramas de Venn**.

El conjunto universal no es único. Este cambia de acuerdo al tema que tratamos. Así, si hablamos de geometría, el conjunto universal es el conjunto formado por todos los puntos; si hablamos de letras, el conjunto universal es el conjunto formado por todas las letras del alfabeto. La idea de que el conjunto universal es el conjunto formado por todos los conjuntos es desechada porque nos lleva a contradicciones.

¿SABIAS QUE . . .

JOHN VENN (1.834-1.923) *nació en Hull, Inglaterra. En 1.857 se graduó en matemáticas y en 1.857 se ordenó como sacerdote. En 1.862 ingresó al cuerpo docente de la Universidad de Cambridge, como profesor de lógica y de probabilidades. En su libro,* ***Lógica Simbólica****, Venn hace uso extensivo de figuras geométricas para explicar las ideas originales de Boole. Estas son las figuras que ahora se llaman* ***Diagramas de Venn****.*



J. Venn

DETERMINACION DE UN CONJUNTO

Se determina un conjunto de dos maneras: por **comprensión** y por **extensión**.

a. Por extensión. Se enumeran, entre llaves, los elementos del conjunto. El orden en que se enumeran no importa. Así, los siguientes conjuntos son determinados por extensión:

1. $A = \{ a, e, i, o, u \}$ **2.** $B = \{1, 2, 3, 8 \}$

b. Por comprensión. Se expresa el conjunto como el dominio de verdad de una función proposicional que tiene como dominio un conjunto universal. Así, si $(U, P(x))$ es una función proposicional, entonces

$$A = \{ x \in U \,/\, P(x) \} \qquad (1)$$

define al conjunto formado por todos los elementos de U que hacen a $P(x)$ verdadera.

Esta manera de definir un conjunto se conoce, en la teoría formal de conjuntos, como el **axioma de especificación.**

Cuando el conjunto universal está sobreentendido, la expresión anterior se escribe simplemente así:

$$A = \{ x \,/\, P(x) \}$$

EJEMPLO 1 $P = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, \exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2n \}$ es el conjunto de números naturales pares.

DEFINICION. Se llama **conjunto vacío** al conjunto

$$\varnothing = \{ x \in U \,/\, x \neq x \}$$

Puesto que no existe ningún objeto que sea distinto de si mismo, el conjunto vacío no tiene elementos.

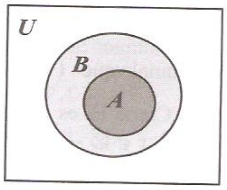
Podemos definir el conjunto vacío de otras maneras, como

$$\varnothing = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = x + 1 \} \quad \text{o} \quad \varnothing = \{ n \in \mathbb{N} \,/\, n < 0 \}.$$

SUBCONJUNTO

DEFINICION. Sean A y B conjuntos. Diremos que $\boldsymbol{A}$ **es subconjunto de** $\boldsymbol{B}$ o que $\boldsymbol{A}$ **está incluido en** $\boldsymbol{B}$, y escribiremos $\boldsymbol{A \subset B}$, si todo elemento de A es también elemento de B. Esto es, simbólicamente,

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$



A la negación de $\boldsymbol{A \subset B}$ la denotaremos así: $\boldsymbol{A \not\subset B}$.

EJEMPLO 2 Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces $A \subset B$ y $B \not\subset A$

OBSERVACION Para dar una prueba directa $\mathbf{A \subset B}$ debemos verificar que se cumple con la definición: $\boldsymbol{(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)}$.

Para esto, se sigue el siguiente esquema:

Sea x cualquier elemento.

$x \in A \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in B$,

Por tanto $A \subset B$.

EJEMPLO 3 Si $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-3| < 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 1\}$, probar que $A \subset B$

Solución

De acuerdo a la definición, debemos probar que:

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Para esto, representamos con x un elemento cualquiera y procedemos:

$x \in A \Leftrightarrow \lvert x-3 \rvert < 1$	Definición del conjunto A
$\Leftrightarrow -1 < x-3 < 1$	Propiedad del valor absoluto
$\Leftrightarrow 2 < x < 4$	Sumando 3 a las desigualdades
$\Rightarrow 1 \leq x$	Del paso anterior
$\Leftrightarrow x \geq 1$	Del paso anterior
$\Leftrightarrow x \in B$	Definición del conjunto B.

Luego, por la transitividad de la implicación, hemos probado que

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

Como x es un elemento cualquiera, concluimos que

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ y, por tanto, } A \subset B.$$

TEOREMA 4.1 Para cualquier conjunto A, $\varnothing$ **es subconjunto de** A. Esto es,

$$\varnothing \subset A, \quad \forall A.$$

Demostración

Debemos verificar que se cumple que $(\forall x)(x \in \varnothing \Rightarrow x \in A)$.

Sea x cualquier elemento. Como $\varnothing$ es vacío, la proposición $x \in \varnothing$ es siempre falsa. Por tanto, el condicional $x \in \varnothing \rightarrow x \in A$, por tener antecedente falso, siempre es verdadero. En consecuencia se cumple que

$$x \in \varnothing \Rightarrow x \in A,$$

y, por tanto, $\varnothing \subset A$.

TEOREMA 4.2 La inclusión de conjuntos es:

1. **Reflexiva:** $A \subset A, \forall A$.
2. **Transitiva:** $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Demostración

1. Sea A cualquier conjunto y x cualquier elemento. La propiedad reflexiva de la implicación nos dice que: $x \in A \Rightarrow x \in A$. Luego, $A \subset A$.

2. $x \in A \Rightarrow x \in B$ porque $A \subset B$
   $\Rightarrow x \in C$ porque $B \subset C$
   Por tanto $A \subset C$.

IGUALDAD DE CONJUNTOS

Dos conjuntos A y B son iguales, y escribiremos $A = B$, si ambos tienen exactamente los mismos elementos. Este resultado se expresa, mediante la relación de inclusión, del modo siguiente:

DEFINICION Sean A y B dos conjuntos.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ y } B \subset A$$

Esta definición también pude expresarse así:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

O, equivalentemente,

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

TEOREMA 4.3 La relación de inclusión de conjuntos es **antisimétrica.** Esto es,

$$A \subset B \text{ y } B \subset A \Rightarrow A = B$$

Demostración

Esta proposición es sólo una de las dos implicaciones de la definición de igualdad de conjuntos.

TEOREMA 4.4 La relación de igualdad de conjuntos es:

Reflexiva: $A = A, \ \forall A.$

Simétrica: $A = B \Rightarrow B = A.$

Transitiva: $A = B$ y $B = C \Rightarrow A = C.$

Demostración

Estas propiedades de igualdad son consecuencias inmediatas de la definición de igualdad y de las propiedades de la inclusión.

DEFINICION. Diremos que un conjunto A está **incluido propiamente** en un conjunto B o que A es **subconjunto propio** de B si y sólo si $A \subset B$ y $A \neq B$.

En otras palabras, A es subconjunto propio de B si y sólo si todo elemento de A es también elemento de B y existe al menos un elemento de B que no está en A.

EJEMPLO 4 $A = \{a, b\}$ es un subconjunto propio de $B = \{a, b, c\}$.

CONJUNTO POTENCIA

DEFINCION. Sea A un conjunto. El **conjunto potencia** de A es el conjunto $\bar{}(A)$ cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. Esto es

$$\wp(A) = \{ X / X \subset A \}$$

EJEMPLO 5 **a.** Si $A = \varnothing$, entonces $\wp(A) = \{ \varnothing \}$.

b. Si $A = \{ a \}$, entonces $\wp(A) = \{ \varnothing, \{ a \} \}$.

c. Si $A = \{ a, b \}$, entonces $\wp(A) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \} \}$.

d. Si $A = \{ a, b, c \}$, entonces

$$\wp(A) = \{\varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{b, c\}, \{ a, b, c \} \}.$$

OBSERVACION 1 Cuando los conjuntos son elementos de otros conjuntos se tiende a confundir el concepto de pertenencia con el de inclusión. Tener presente que $B \in A$ significa que el conjunto B es un elemento del conjunto A, mientras que $B \subset A$ significa que todos los elementos de B también son elementos de A. Así, si

$A = \{\{a, b\}, \{c, d\}, e\}$, $B = \{a, b\}$ y $C = \{c, d\}$,
se tiene que:

1. $B \in A$. **2.** $B \not\subset A$. **3.** $e \in$ A. **4.** $\{e\} \subset$ A.

5. $B \notin \wp(A)$. **6.** $\{e\} \in \wp(A)$. **7.** $\varnothing \in \wp(A)$. **8.** $\varnothing \subset \wp(A)$

OBSERVACION 2 En la expresión $\wp(A) = \{X / X \subset A\}$, dada en la definición anterior, no aparece el conjunto universal, de donde se deben tomar los elementos X. Esta vez, la omisión no se debe a que el conjunto universal está sobreentendido; sino porque tal conjunto no lo conocemos. La existencia de tal conjunto debe admitirse mediante un axioma, llamado el axioma de las potencias. Este conjunto no es el mismo U donde están los elementos de A.

TEOREMA 4.5 Sean A y B dos conjuntos. Se tiene que

$$A \subset B \Leftrightarrow \wp(A) \subset \wp(B).$$

Demostración

Comenzamos observando que en este teorema, por ser una doble implicación, en realidad hay dos teoremas, que son:

1. $A \subset B \Rightarrow \wp(A) \subset \wp(B)$. **2.** $\wp(A) \subset \wp(B) \Rightarrow A \subset B$.

Probemos cada uno de ellos, separadamente.

1. Sea X un conjunto cualquiera.

$$\begin{aligned} X \in \wp(A) &\Rightarrow X \subset A && \text{Definición de } \wp(A) \\ &\Rightarrow X \subset B && \text{Hipótesis: } A \subset B \\ &\Rightarrow X \in \wp(B) && \text{Definición de } \wp(B). \end{aligned}$$

Luego, $\wp(A) \subset \wp(B)$.

2. Como $A \in \wp(A)$ y, por hipótesis $\wp(A) \subset \wp(B)$, tenemos que $A \in \wp(B)$. Por tanto, $A \subset B$.

Observando el ejemplo 5 vemos que:

a. A tiene 0 elementos y $\wp(A)$ tiene $1 = 2^0$ elementos.

b. A tiene 1 elementos y $\wp(A)$ tiene $2 = 2^1$ elementos.

c. A tiene 2 elementos y $\wp(A)$ tiene $4 = 2^2$ elementos.

d. A tiene 3 elementos y $\wp(A)$ tiene $8 = 2^3$ elementos.

Estos resultados son casos particulares del siguiente teorema, el cual inspira el nombre de conjunto potencia dada a $\wp(A)$.

TEOREMA 4.6 Si A tiene n elementos, entonces $\wp(A)$ tiene 2^n elementos.

Demostración

Sea

$$A = \{ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \}$$

Paso 1. Tomamos el elemento x_1. Este elemento, junto con el vacío, nos dan los dos primeros elementos de $\wp(A)$, que son los subconjuntos:

$$\varnothing, \quad \{ x_1 \}.$$

Paso 2. Tomamos el elemento x_2. Este elemento, agregado a los elementos de los 2 subconjuntos anteriores, nos dan otros 2, $\{ x_2 \}$ y $\{ x_1, x_2 \}$. Estos 2 nuevos y los 2 antiguos nos dan los $4 = 2^2$ siguientes subconjuntos de A:

$$\varnothing, \quad \{ x_1 \}, \quad \{ x_2 \}, \quad \{ x_1, x_2 \}.$$

Paso 3. Tomamos el elemento x_3. Este elemento, agregado a los elementos de los 4 subconjuntos anteriores, nos dan los 4 nuevos subconjuntos de A:

$$\{ x_3 \}, \{ x_1, x_3 \}, \quad \{ x_2, x_3 \}, \quad \{ x_1, x_2, x_3 \}.$$

Estos 4 nuevos y los 4 antiguos dan los $8 = 2^3$ siguientes subconjuntos de A:

$$\varnothing, \quad \{ x_1 \}, \quad \{ x_2 \}, \quad \{ x_1, x_2 \}, \{ x_3 \}, \{ x_1, x_3 \}, \quad \{ x_2, x_3 \}, \quad \{ x_1, x_2, x_3 \}$$

El proceso termina con el paso n, en él cual tomamos el último elemento x_n y obtenemos, al fin de cuentas, 2^n subconjuntos de A. Como los elementos de A se han agotado, estos 2^n subconjuntos son todos los subconjuntos de A. Esto es, $\wp(A)$ tiene 2^n elementos.

LA PARADOJA DE RUSSELL

Bertrand Russell descubrió, en 1.901, la siguiente paradoja, que puso en serias dificultades a la teoría de conjuntos. El problema resulta de llamar conjunto a cualquier colección de objetos.

Un conjunto B se dice que es **ordinario** si $B \notin B$. Por ejemplo, el conjunto L formado por todos los libros es un conjunto ordinario, ya que como L no es un libro, tenemos que $L \notin L$. En cambio el conjunto A formado por todas las ideas abstractas no es ordinario, ya que como A mismo es una idea abstracta, tenemos que $A \in A$.

Consideremos el conjunto $\mathcal{O}$ formado por todos los conjuntos ordinarios:

$$\mathcal{O} = \{ X / X \notin X \}$$

Nos preguntamos si $\mathcal{O}$ ordinario o no lo es. Es decir, $\mathcal{O} \in \mathcal{O}$ u $\mathcal{O} \notin \mathcal{O}$. En el primer caso, si $\mathcal{O} \in \mathcal{O}$, entonces, por definición de $\mathcal{O}$, $\mathcal{O} \notin \mathcal{O}$. En el segundo caso, si $\mathcal{O} \notin \mathcal{O}$, entonces, por definición de $\mathcal{O}$, $\mathcal{O} \in \mathcal{O}$. Así, hemos obtenido la contradicción:

$$\mathcal{O} \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \mathcal{O} \notin \mathcal{O}.$$

Para salvar la dificultad, debemos admitir que $\mathcal{O}$ no es un conjunto.

PROBLEMAS RESUELTOS 4.1

PROBLEMA 1 Determinar la verdad o falsedad de las proposiciones:

1. $\varnothing \in \varnothing$ **2.** $\varnothing \subset \varnothing$ **3.** $\varnothing \in \{ \varnothing \}$ **4.** $\{ \varnothing \} \subset \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \}$

Solución

1. Falso, $\varnothing$ no tiene elementos.

2. Verdadero, $\varnothing$ es subconjunto de todo conjunto A y, en particular, de $A = \varnothing$.

3. Verdadero, $\{ \varnothing \}$ es un conjunto unitario cuyo único elemento es $\varnothing$.

4. Verdadero, $\varnothing$ es un elemento de $\{ \varnothing, \{ \varnothing \} \}$ y, por tanto, $\{ \varnothing \} \subset \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \}$.

PROBLEMA 2 probar que: $A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$

Solución

Teniendo en cuenta la ley del condicional, $p \to q \equiv \sim p \vee q$, en la definición de inclusión tenemos que:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall x)(\sim (x \in A) \vee (x \in B))$$

Luego, negando ambos lados,

$$\sim (A \subset B) \Leftrightarrow \sim [(\forall x)(\sim (x \in A) \vee (x \in B))],$$

obtenemos que:

Por ejemplo, el conjunto L que como L no es un libro, ni todas las ideas abstractas ma, tenemos que $A \in A$.

juntos ordinarios:

$0 \in 0$ u $0 \notin 0$. En el $\notin 0$. En el segundo caso, si obtenido la contradicción:

conjunto.

DS 4.1

proposiciones:

4. $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

particular, de $A = \varnothing$.

mento es $\varnothing$.

$\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

$\wedge x \notin B)$

$\vee q$, en la definición de

$(\sim(x \in A) \vee (x \in B))$

$B))]$,

$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x) \sim [\sim (x \in A) \vee (x \in B)]$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)[\sim\sim(x \in A) \wedge \sim(x \in B)]$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)[x \in A \wedge x \notin B].$$

Esto es, $$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$$

PROBLEMA 3 Si $A = \{a\}$, hallar $\wp(\wp(A))$

Solución

Tenemos que $\wp(A) = \{\varnothing, \{a\}\}$. Luego,

$$\wp(\wp(A)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\varnothing, \{a\}\}\}.$$

PROBLEMA 4 Si A tiene n elementos, hallar el número de elementos de:

1. $\wp(\wp(A))$ **2.** $\wp(\wp(\wp(A)))$

Solución

Si A tiene n elementos, sabemos que $\wp(A)$ tiene 2^n elementos. Luego,

1. $\wp(\wp(A))$ tiene 2^{2^n} elementos.
2. $\wp(\wp(\wp(A)))$ tiene $2^{2^{2^n}}$ elementos.

PROBLEMA 5 Probar que $A = B$ si

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / \exists\, n \in \mathbb{Z} /\ x = 7n + 2\} \text{ y } B = \{x \in \mathbb{Z} / \exists\, n \in \mathbb{Z} /\ x = 7n - 5\}$$

Solución

Debemos probar que: **1.** $A \subset B$ y **2.** $B \subset A$

1. $A \subset B$

$x \in A \Rightarrow x = 7n + 2$, para algún $n \in \mathbb{Z}$

Pero, $x = 7n + 2 = 7(n + 1) - 7 + 2 = 7(n + 1) - 5 \Rightarrow x \in B$

Luego, $A \subset B$.

2. $B \subset A$

$x \in B \Rightarrow x = 7n - 5$, para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Pero, $x = 7n - 5 = 7(n - 1) + 7 - 5 = 7(n - 1) + 2 \Rightarrow x \in A$.

Luego, $B \subset A$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.1

1. Determinar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a. $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$ **b.** $\{\varnothing\} \subset \{\{\varnothing\}\}$ **c.** $\{\varnothing\} = \{\{\varnothing\}\}$

d. $\{\{\varnothing\}\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ **e.** $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subset \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ **f.** $\varnothing \in \wp(\varnothing)$

g. $\varnothing \subset \wp(\varnothing)$ **h.** $\varnothing \subset \wp\,\wp(\varnothing)\}$ **i.** $\varnothing \in \wp\{(\varnothing)\}$

J. $\wp(\varnothing) \in \wp\{\wp(\varnothing)\}$ **k.** $\wp(\varnothing) \subset \wp\{(\varnothing)\}$ **l.** $\{2\} \in \wp(\mathbb{Z})$

m. $\{\varnothing\} \subset \wp(A), \forall A$

2. Expresar por extensión los siguientes conjuntos:

a. $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x = n^2,\ n \text{ primo y } n \leq 11\}$ **b.** $B = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x^3 = x\}$

c. $C = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, \exists\, n \in \mathbb{N} \,/\, x = 3n + 1\}$ **d.** $D = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \text{ divide a } 36\}$

e. $E = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$ **f.** $F = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, |x+1| \leq 3\}$

g. $G = \left\{b \in \mathbb{Z} \,/\, \frac{b+3}{b+1} = -3\right\}$

h. $H = \{x \in \mathbb{Q} / \ x = 3n + 1/4,\ n \in \mathbb{Z},\ -1 \leq n < 2\}$

3. Expresar, por comprensión, los siguientes conjuntos:

a. $A = \{0, 5, 10, 15, 20, \ldots 100\}$ **b.** $B = \{1, 4, 9, 25, 16, \ldots 144\}$

c. $C = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25\}$ **d.** $D = \{1, 8, 27, 64, 125\}$

e. $E = \{3\sqrt{3},\ 5\sqrt{3},\ 7\sqrt{3},\ 9\sqrt{3}\}$

4. Sea P el conjunto formado por todos los polígonos, R el conjunto formado por todos los rectángulos, C el conjunto formado por todos los cuadriláteros y B el conjunto formado por todos los rombos. El universo del discurso es F, el conjunto de todas las figuras geométricas. Representar estos cuatro conjuntos en un solo diagrama de Venn. ¿Cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas?

a. $(\forall x)(x \in R \Rightarrow x \in C)$ **b.** $R \subset C$

c. $(\exists x)(x \in C \wedge x \in B)$ **d.** $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in C)$

e. $B \subset C$ **f.** $(\exists x)(x \in R \wedge x \notin B)$

g. $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \notin R)$ **h.** $(\exists x)(x \in P \wedge x \in R)$

i. $C \subset P$

5. Dar un ejemplo de conjuntos A, B, C que cumplan:

a. $A \subset B,\ B \not\subset C$ y $A \subset C$ **b.** $A \subset B,\ B \subset C$ y $C \subset A$

c. $A \not\subset B,\ B \not\subset C$ y $A \subset C$ **d.** $A \subset B$ y $\wp(B) \subset \wp(A)$

e. $A \not\subset B, B \subset C$ y $\wp(A) \subset \wp(C)$ **f.** A tal que $\wp(A) = \varnothing$

6. Si $\wp(A)$ tiene 512 elementos ¿Cuántos elementos tiene A ?

7. Si A tiene $3m$ elementos, hallar el número de elementos de
   a. $\wp(A)$ **b.** $\wp(\wp(A))$ **c.** $\wp(\wp(\wp(A)))$

8. Si $\wp(\wp(\wp(A)))$ tiene $2^{2^{2^{m+1}}}$ elementos ¿Cuántos elementos tiene $\wp(A)$?

9. Si $A = \{ 9n + 1 / n \in \mathbb{Z} \}$ y $B = \{ 9n - 8 / n \in \mathbb{Z} \}$, probar que $A = B$.

10. Probar que la relación de inclusión propia es transitiva, pero no es reflexiva.

11. Si $A \subset B$, $B \subset C$, y $C \subset A$, probar que $A = B = C$.

SECCION 4.2
UNION E INTERSECCION DE CONJUNTOS

En siguientes dos secciones estudiaremos las operaciones básicas de conjuntos: unión, intersección, diferencia, complemento y diferencia simétrica. Para esto, vamos a admitir que contamos con un conjunto universal U el cual contiene como subconjuntos, todos los conjuntos que aparecerán en nuestra discusión.

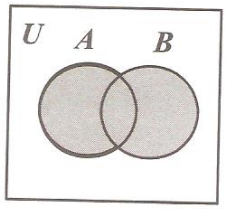
DEFINICION Sean A y B dos conjuntos.

1. La **unión de A y B** es el conjunto

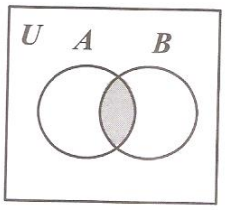
$$A \cup B = \{ x \in U / x \in A \vee x \in B \}$$

2. La **intersección** de A y B es el conjunto

$$A \cap B = \{ x \in U / x \in A \wedge x \in B \}$$



$A \cup B$



$A \cap B$

EJEMPLO 1 Si $A = \{ a, b, c \}$ y $B = \{ b, c, d, e \}$, entonces

$$A \cup B = \{ a, b, c, d, e \} \quad \text{y} \quad A \cap B = \{ b, c \}.$$

DEFINICION Dos conjuntos A y B son **disjuntos** si y sólo si $\boldsymbol{A \cap B = \varnothing}$.

EJEMPLO 2 Los conjuntos $A = \{ 1, 2, 3 \}$ y $B = \{ 4, 5, 8 \}$ son disjuntos.

Como la unión y la intersección de conjuntos se definen mediante la disyunción y la conjunción de proposiciones respectivamente, las propiedades de estas operaciones veritativas darán lugar a propiedades similares de la unión e intersección. Así, la idempotencia, conmutatividad, asociatividad y distributividad de la disyunción y conjunción nos dan los siguientes resultados.

TEOREMA 4.7 La **unión** e **intersección** de conjuntos son:

1. **Idempotentes:** $A \cup A = A$ y $A \cap A = A, \quad \forall A$
2. **Conmutativas:** $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A, \ \forall A, \forall B$
3. **Asociativas:** $\forall A, \forall B, \forall C,$
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Demostración.

1. $x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A$

   Luego, $A \cup A = A$.

   $x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in A$

   Luego, $A \cap A = A$

2. $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A$

   Luego, $A \cup B = B \cup A$.

   Similarmente, $A \cap B = B \cap A$

3. $x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$

   $\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C$

   $\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

   Luego, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

   Similarmente, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

OBSERVACION La propiedad asociativa de la unión y de la intersección nos permite escribir la unión y la intersección de tres conjuntos prescindiendo de paréntesis, $A \cup B \cup C$ o $A \cap B \cap C$, sin tener ambigüedad.

TEOREMA 4.8 **1.** La **intersección** es **distributiva respecto a la unión**:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad \forall A, \forall B, \forall C.$$

2. La unión es **distributiva respecto a la intersección:**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad \forall A, \forall B, \forall C.$$

Demostración.

1. $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ (Ley distributiva 4b.)

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Luego, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. Se procede como en 1.

PROBLEMAS RESUELTOS 4.2

PROBLEMA 1 Probar, que para todo conjunto B se cumple que:

1. $A \subset A \cup B$ **2.** $A \cap B \subset A$

Solución

1. $x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B$ Regla de inferencia de la adición

$\Rightarrow x \in A \cup B$

Luego, $A \subset A \cup B$

2. $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\Rightarrow x \in A$ Regla de la inferencia de la simplificación

Luego, $A \cap B \subset A$

PROBLEMA 2 Probar que para todo conjunto A se cumple que:

1. $A \cup \varnothing = A$ **2.** $A \cap \varnothing = \varnothing$

Solución

1. Por el problema anterior parte 1, tomando $B = \varnothing$, tenemos:

$$A \subset A \cup \varnothing \qquad \textbf{(a)}$$

Por otro lado,

$$x \in A \cup \varnothing \Rightarrow x \in A \vee x \in \varnothing$$

$$\Rightarrow x \in A \qquad \text{Silogismo disyuntivo y } x \notin \varnothing$$

Luego, $A \cup \varnothing \subset A$ **(b)**

De (a) y (b) obtenemos que $A \cup \varnothing = A$.

2. Aplicando la parte 2 del problema 1, tenemos:

$$A \cap \varnothing \subset \varnothing \qquad \textbf{(c)}$$

Por otro lado, como $\varnothing$ está incluido en todo conjunto,

$$\varnothing \subset A \cap \varnothing \qquad \textbf{(d)}$$

Luego, de (c) y (d) obtenemos que $A \cap \varnothing = \varnothing$.

PROBLEMA 3 Probar que $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

Solución

$(\Rightarrow)$ $x \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$ $\qquad A = A \cap B$

$\Rightarrow x \in B$ $\qquad$ Ley de Simplificación

Luego, $A \subset B$

$(\Leftarrow)$ Por la parte 2 del problema 1 tenemos que:

$$A \cap B \subset A \qquad \textbf{(a)}$$

Por otro lado,

$x \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$ $\qquad A \subset B$

$\Rightarrow x \in A \cap B$

Luego, $A \subset A \cap B$ **(b)**

De **(a)** y **(b)** concluimos que $A \cap B = A$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.2

1. Si $A \cup B = A$, para todo conjunto A, probar que $B = \varnothing$.
2. Probar que $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$
3. Probar que:
   a. $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$
   b. $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$
   c. $A \subset B \vee A \subset C \Rightarrow A \subset B \cup C$
   d. $A \subset B \wedge A \subset C \Rightarrow A \subset B \cap C$
   e. $A \subset C \wedge B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$
   f. $A \subset C \vee B \subset C \Rightarrow A \cap B \subset C$
4. Probar que $A \cup B \neq \varnothing \Rightarrow A \neq \varnothing \vee B \neq \varnothing$
5. Probar que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow C \subset A$
6. Probar que $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$
7. Probar que $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$
8. Probar que $A \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap (A \cup B_3)$.
9. Probar que $\wp(A) \cap \wp(B) = \wp(A \cap B)$.
10. Probar que $\wp(A) \cup \wp(B) \subset \wp(A \cup B)$ y probar, mediante un contraejemplo, que no siempre se cumple que $\wp(A \cup B) \subset \wp(A) \cup \wp(B)$.
11. Probar que $A \subset B \Rightarrow \wp(A) \cup \wp(B) = \wp(A \cup B)$

SECCION 4.3
DIFERENCIA, COMPLEMENTO Y DIFERENCIA SIMETRICA

DEFINICION Sean A y B dos conjuntos

1. La **diferencia entre** A y B es el conjunto

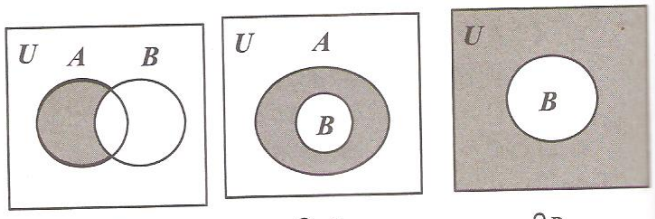
$$A - B = \{ x \in A \,/\, x \notin B \}$$

2. Si $B \subset A$, el **complemento de B con respecto a A** es el conjunto

$$\complement_A B = A - B$$

3. El **complemento de B**, $\complement B$, es el complemento de B respecto a U.

$$\complement B = \complement_U B$$



$A - B$ $\qquad$ $\complement_A B$ $\qquad$ $\complement B$

EJEMPLO 1 **a.** Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 4, 8, 9\}$, entonces
$A - B = \{1, 3, 5, 6\}$

b. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$, entonces
$\complement_A B = \{1, 3, 5\}$

c. Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$, entonces
$\complement B = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$

TEOREMA 4.9 Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces

$$A - B = A \cap \complement B$$

Demostración.

$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \complement B \Leftrightarrow x \in A \cap \complement B$

Luego, $A - B = A \cap \complement B$.

TEOREMA 4.10 Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces

1. $A \cup \complement A = U, \quad A \cap \complement A = \varnothing$
2. $\complement(\complement A) = A$
3. $\complement U = \varnothing, \quad \complement\varnothing = U$
4. $A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$

Demostración

Las tres primeras propiedades son inmediatas y las dejamos como ejercicio para el lector (ver el problema propuesto 6). Probemos la cuarta.

4. $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(x \notin B \Rightarrow x \notin A)$ Contrarrecíproco

$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in \complement B \Rightarrow x \in \complement A)$

$\Leftrightarrow \complement B \subset \complement A.$

TEOREMAS 4.11 **Leyes de De Morgan para Conjuntos.**

Si A y B son conjuntos cualesquiera, entonces

1. $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ 2. $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

Demostración

1. $x \in \complement(A \cup B) \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow \sim(x \in A \cup B)$

$\Leftrightarrow \sim(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in \complement A \wedge x \in \complement B \Leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B$

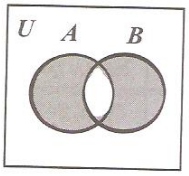
Luego, $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

2. Se procede como en 1.

DIFERENCIA SIMETRICA

DEFINICION La **diferencia simétrica** de los conjuntos A y B es el conjunto

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



OBSERVACION La diferencia simétrica también puede definirse como

$$A \Delta B = \{x \in U / x \in A \veebar x \in B\}$$

En efecto, de acuerdo a la Ley de la disyunción exclusiva:

$$x \in A \veebar x \in B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A - B) \vee x \in (B - A)$$

EJEMPLO 2 Si $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ y $B = \{ 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$, entonces

$$A - B = \{ 1, 2, 3 \}, \qquad B - A = \{ 7, 8, 9 \} \qquad \text{y}$$
$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{ 1, 2, 3, 7, 8, 9 \}$$

TEOREMA 4.12 La diferencia simétrica es

1. **Conmutativa:** $A \Delta B = B \Delta A, \quad \forall A, \forall B.$
2. **Asociativa:** $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C, \ \forall A, \forall B, \forall C.$

Demostración

1. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \Delta A$
2. Ver el problema resuelto 6.

ALGEBRA DE CONJUNTOS

Hacemos resaltar la estrecha relación que hay entre el cálculo proposicional y la teoría de conjuntos. El nexo entre estas dos teorías lo establece el **axioma de especificación**. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos funciones proposicionales con dominio un conjunto U, el axioma de especificación nos dice que quedan perfectamente determinados los conjuntos:

$$A = \{ x \in U / P(x) \} \quad \text{y} \quad B = \{ x \in U / Q(x) \}$$

Los conectivos lógicos aplicados a $P(x)$ y $Q(x)$ dan lugar a operaciones en los conjuntos A y B, como muestra siguiente tabla.

LOGICA	CONJUNTOS
$P(x) \vee Q(x)$	$A \cup B$
$P(x) \wedge Q(x)$	$A \cap B$
$\sim P(x)$	$\complement A$
$P(x) \wedge \sim Q(x)$	$A - B$
$P(x) \veebar Q(x)$	$A \Delta B$
$P(x) \Rightarrow Q(x)$	$A \subset B$
$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$	$A = B$

La correspondencia entre las operaciones veritativas y las operaciones de conjuntos, mostrados en la tabla anterior, nos permiten traducir el álgebra de proposiciones, tratado en el capítulo 1, en una nueva álgebra, que llamaremos álgebra de conjuntos y cuyas leyes presentamos a continuación. Más adelante veremos que estas dos álgebras son dos casos particulares de de una estructura más general llamada **álgebra de Boole**.

LEYES DEL ALGEBRA DE CONJUNTOS

Leyes Idempotentes

1a. $A \cup A = A$ **1b.** $A \cap A = A$

Leyes Asociativas

2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ **2b.** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Leyes Conmutativas

3a. $A \cup B = B \cup A$ **3b.** $A \cap B = B \cap A$

Leyes Distributivas

4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **4b.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leyes de Identidad o de Elemento Neutro

5a. $A \cup \varnothing = A$ **5b.** $A \cap U = A$

Leyes de Dominación

6a. $A \cup U = U$ **6b.** $A \cap \varnothing = \varnothing$

Leyes de Complementación

7a. $A \cup \complement A = U$ **7b.** $A \cap \complement A = \varnothing$

8a. $\complement(\complement A) = A$ **8b.** $\complement U = \varnothing, \quad \complement\varnothing = U$

Leyes de De Morgan

9a. $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ **9b.** $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

La mayoría de estas leyes, como las idempotentes, conmutativas, asociativas, distributivas, algunas de identidad y las de De Morgan, ya ha sido probadas en los teorema anteriores. Las restantes las dejamos como ejercicio para el lector.

Así como las leyes del álgebra de proposiciones, estas nuevas leyes se pueden usar para probar otros resultados.

EJEMPLO 3 Probar que **la intersección es distributiva respecto a la diferencia**:

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C), \ \forall A, \forall B, \forall C$$

Solución.

Por un lado tenemos que

$$A \cap (B - C) = A \cap (B \cap \complement C) \qquad \text{Teo. 4.9}$$

$$= A \cap B \cap \complement C$$

Por otro lado

$$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap \complement(A \cap C) \qquad \text{Teo. 4.9}$$

$$= (A \cap B) \cap (\complement A \cup \complement C) \qquad \text{9b.}$$

$$= [\,(A \cap B) \cap \complement A] \cup [(A \cap B) \cap \complement C)\,] \qquad \text{4b.}$$

$$= [\,(A \cap \complement A) \cap B] \cup [(A \cap B \cap \complement C\,] \qquad \text{2b. y 3b.}$$

$$= [\,\varnothing \cap B\,] \cup [\,A \cap B \cap \complement C\,] \qquad \text{7b.}$$

$$= \varnothing \cup [\,A \cap B \cap \complement C\,] \qquad \text{5b.}$$

$$= A \cap B \cap \complement C \qquad \text{5a}$$

Luego, $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

OBSERVACION La unión no es distributiva respecto a la diferencia. Ver el problema propuesto 12.

EJEMPLO 4 Usando las leyes del álgebra de conjuntos, probar que

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Solución

$$A - (B \cap C) = A \cap \complement(B \cap C) \qquad \text{Teo. 4.9}$$

$$= A \cap (\complement B \cup \complement C) \qquad \text{9.b.}$$

$$= (A \cap \complement B) \cup (A \cap \complement C) \qquad \text{4.b.}$$

$$= (A - B) \cup (A - C) \qquad \text{4.b.}$$

EJEMPLO 5 Simplificar la siguiente expresión

$$\complement(A \cup B) \cup [\complement A \cap (A \cup B)]$$

Solución

$$\complement(A \cup B) \cup [\complement A \cap (A \cup B)] = \complement(A \cup B) \cup [(\complement A \cap A) \cup (\complement A \cap B)] \qquad \text{4b.}$$

Teo. 4.9

Teo. 4.9

9b.

$\complement C)\,]$ 4b.

$\complement C\,]$ 2b. y 3b.

7b.

5b.

5a

---

ecto a la diferencia. Ver el

---

os, probar que

$C)$

Teo. 4.9

9.b.

4.b.

4.b.

$\complement A \cap B)]$ 4b.

$$= \complement(A \cup B) \cup [\,\varnothing \cup (\complement A \cap B)\,] \qquad \text{7b.}$$

$$= \complement(A \cup B) \cup [\complement A \cap B)] \qquad \text{5a.}$$

$$= (\complement A \cap \complement B) \cup [\complement A \cap B] \qquad \text{9a}$$

$$= \complement A \cap [\complement B \cup B] \qquad \text{4b.}$$

$$= \complement A \cap U \qquad \text{7a.}$$

$$= \complement A \qquad \text{6b.}$$

PROBLEMAS RESUELTOS 4.3

PROBLEMA 1 Determinar A, B, C y el conjunto universal U, sabiendo que:

1. $\complement A = \{\,1, 2, 5, 6, 8\,\}$ **2.** $A \cup B = \{\,2, 3, 4, 5, 7, 9\,\}$

3. $A \cap B = \{\,9\,\}$ **4.** $A \cup C = \{\,3, 4, 6, 7, 9\,\}$

5. $\complement(A \cup B \cup C) = \{\,1, 8\,\}$ **6.** $A \cap C = \{\,3\,\}$

Solución

Tenemos que:

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup (A \cup C) = \{\,2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\,\}$$

Luego,

$$U = (A \cup B \cup C) \cup \complement(A \cup B \cup C) = \{\,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\,\}$$

$$A = \complement\complement A = \complement\{\,1, 2, 5, 6, 8\,\} = \{\,3, 4, 7, 9\,\} \qquad \textbf{(7)}$$

De (7), 2 y 3 obtenemos: $B = \{\,2, 5, 9\,\}$

De (7), 4 y 6 obtenemos: $C = \{\,3, 6\,\}$.

PROBLEMA 2 Probar que $A \subset B \Leftrightarrow (B - A) \cup A = B$

Solución

$(\Rightarrow)$ $(B - A) \cup A = (B \cap \complement A) \cup A$ Teo. 4.9

$= (B \cup A) \cap (\complement A \cup A)$ 4a.

$= (B \cup A) \cap U$ 7a

$= B \cup A$ 6a.

$= B$ $A \subset B$

$(\Leftarrow)$ $A \subset (B-A) \cup A$ Problema resuelto 1, de 4.2

Luego, $A \subset B$ $(B-A) \cup A = B$

PROBLEMA 3 **La diferencia de conjuntos no es asociativa.**

a. Probar que $(A-B)-C \subset A-(B-C), \forall A, \forall B, \forall C$

b. Con un contraejemplo, probar que la siguiente inclusión es falsa:

$$A-(B-C) \subset (A-B)-C, \forall A, \forall B, \forall C$$

Este resultado nos prueba que la diferencia de conjuntos no es asociativa. Es decir, en general, se cumple que:

$$(A-B)-C \neq A-(B-C)$$

Solución

a. $(A-B)-C = (A \cap \complement B) \cap \complement C$ (Teorema 4.9)

$= (A \cap (\complement B \cap \complement C)$ (Ley asociativa de la $\cap$)

$= A \cap \complement(B \cup C)$ (De Morgan)

Por otro lado,

$A-(B-C) = A \cap \complement(B \cap \complement C)$

Ahora,

$B \cap \complement C \subset B \cup C \Rightarrow \complement(B \cup C) \subset \complement(B \cap \complement C)$ (Tomando complementos)

$\Rightarrow \complement B \cap \complement C) \subset \complement(B \cap \complement C)$ (De Morgan)

$\Rightarrow A \cap (\complement B \cap \complement C) \subset A \cap \complement(B \cap \complement C)$

$\Rightarrow (A \cap \complement B) \cap \complement C \subset A \cap \complement(B \cap \complement C)$

$\Rightarrow (A-B)-C \subset A-(B-C)$

b. Sea $A = \{a, c\}$, $B = \{b\}$ y $C = \{c\}$.

$(A-B)-C = (\{a, c\} - \{b\}) - \{c\} = \{a, c\} - \{c\} = \{a\}$.

$A-(B-C) = \{a, c\} - (\{b\} - \{c\}) = \{a, c\} - \{b\} = \{a, c\}$

Tenemos que:

$$A-(B-C) = \{a, c\} \not\subset \{a\} = (A-B)-C$$

PROBLEMA 4 Probar que para todo conjunto A se cumple que

1. $A \Delta \varnothing = A = \varnothing \Delta A$ **2.** $A \Delta A = \varnothing$

Solución

1. $A \Delta \varnothing = (A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) = A \cup \varnothing = A$

$\varnothing \Delta A = (\varnothing - A) \cup (A - \varnothing) = \varnothing \cup A = A$

2. $A \Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

PROBLEMA 5 Probar que $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Solución

Haremos dos pruebas, usando dos métodos distintos.

Prueba 1

$$
\begin{aligned}
A \Delta B &= (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A) && \text{Teo. 4.9}\\
&= [(A \cap \complement B) \cup B] \cap [(A \cap \complement B) \cup \complement A] && \text{4a.}\\
&= [(A \cup B) \cap (\complement B \cup B)] \cap [(A \cup \complement A) \cap (\complement B \cup \complement A)] && \text{4a.}\\
&= [(A \cup B) \cap U] \cap [U \cap (\complement B \cup \complement A)] && \text{7a.}\\
&= (A \cup B) \cap (\complement B \cup \complement A) && \text{6b.}\\
&= (A \cup B) \cap \complement (A \cap B) && \text{9b.}\\
&= (A \cup B) - (A \cap B). && \text{Teo. 4.9}
\end{aligned}
$$

Prueba 2

Usamos la equivalencia lógica (problema resuelto 2, sección 1.4)

$$p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$$

Bien, tenemos:

$$
\begin{aligned}
x \in A \Delta B &\Leftrightarrow (x \in A) \veebar (x \in B)\\
&\Leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge [\sim(x \in A) \wedge (x \in B)]\\
&\Leftrightarrow [x \in (A \cup B)] \wedge [x \notin (A \cap B)]\\
&\Leftrightarrow x \in [(A \cup B) - (A \cap B)]
\end{aligned}
$$

Luego, $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

PROBLEMA 6 Probar que **la diferencia simétrica es asociativa**:

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

Solución

Aplicando de definición de Δ, el teorema 4.9 y las leyes conmutativas, distributivas y de De Morgan y el problema anterior, se obtiene:

1. $(A \Delta B) \Delta C = \{(A \Delta B) - C\} \cup \{C - (A \Delta B)\}$

$$= \{(A \Delta B) \cap \complement C\} \cup \{\complement(A \Delta B) \cap C\}$$

$$= \{[(A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A)] \cap \complement C\} \cup \{\complement[(A \cup B) \cap \complement(A \cap B)] \cap C\}$$

$$= \{(A \cap \complement B \cap \complement C) \cup (B \cap \complement A \cap \complement C)\} \cup \{[\complement(A \cup B) \cup (A \cap B)] \cap C\}$$

$$= \{(A \cap \complement B \cap \complement C) \cup (B \cap \complement A \cap \complement C)\} \cup \{[(\complement A \cap \complement B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)]\}$$

$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \complement B \cap \complement C) \cup (\complement A \cap B \cap \complement C) \cup (\complement A \cap \complement B \cap C)$$

Por otro laso, aplicando la conmutativa de la diferencia y el resultado anterior (a), tenemos que:

2. $A \Delta (B \Delta C) = (B \Delta C) \Delta A$

$$= (B \cap C \cap A) \cup (B \cap \complement C \cap \complement A) \cup (\complement B \cap C \cap \complement A) \cup (\complement B \cap \complement C \cap A)$$

$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \complement B \cap \complement C) \cup (\complement A \cap B \cap \complement C) \cup (\complement A \cap \complement B \cap C)$$

De (1) y (2) concluimos que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

PROBLEMA 7 Probar que $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$

Solución

$A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow A \Delta (A \Delta B) = A \Delta (A \Delta C)$

$\Rightarrow (A \Delta A) \Delta B = (A \Delta A) \Delta C)$ — Asociatividad

$\Rightarrow \varnothing \Delta B = \varnothing \Delta C$ — Problema 4 parte 2

$\Rightarrow B = C.$ — Problema 4 parte 1

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.3

1. Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{x \in U / x \text{ es par}\}$,

   $B = \{x \in U / x \text{ es primo}\}$ y $D = \{x \in U / x \text{ no es divisor de } 9\}$

   Hallar **a.** $\complement(A \cup B)$ **b.** $B - \complement D$ **c.** $A \Delta B$

   d. $B \Delta (A - D)$ **e.** $A\Delta B - A\Delta D$ **f.** $A\Delta B\Delta D$

2. Hallar los conjuntos A y B sabiendo que:

   a. $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **b.** $A - B = \{7, 9\}$

   c. $\complement A \cap \complement B = \{6\}$ **d.** $A \cap B = \{0, 5, 8\}$

3. Hallar los conjuntos A y B sabiendo que:

   a. $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **b.** $A \Delta B = \{0, 1, 5, 8\}$

   c. $\complement A \cup \complement B = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ **d.** $A \cap \complement B = \{0, 8\}$

4. Hallar los conjuntos A, B, C y U, el conjunto universal, sabiendo que:

   a. $\complement A = \{1, 4, 7, 8, 9\}$ **b.** $\complement B = \{2, 4, 5, 7\}$

   c. $\complement C = \{2, 4, 7, 8\}$ **d.** $A \cap B \cap C = \{0, 3, 6\}$

5. Probar las leyes de identidad y de dominación del álgebra de conjuntos:

   a. $A \cup \varnothing = A$ **b.** $A \cap U = A$

   c. $A \cup U = U$ **d.** $A \cap \varnothing = \varnothing$

6. Probar las leyes de complementación del álgebra de conjuntos:

   a. $A \cup \complement A = U$ **b.** $A \cap \complement A = \varnothing$ **c.** $\complement(\complement A) = A$

   d. $\complement U = \varnothing$ **e.** $\complement \varnothing = U$

7. Probar que:

   a. $A \cup (A \cap B) = A$ **b.** $A \cap (A \cup B) = A$

   Comparar estos resultados con las leyes de absorción de la lógica.

8. Probar que:

   a. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \complement B = \varnothing$ **b.** $A \quad B \Leftrightarrow \complement A \cup B = U$

9. Usando los resultados del problema anterior, probar que:

   a. $\complement A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = U$ **b.** $A \subset \complement B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

10. Probar que:

$$[\complement(\complement A \cup B) \cap \complement(A \cup \complement B)] \cup (A \cap B) = A \cap B$$

11. Probar que:

a. $A \cup B = C \ \wedge \ A \cap B = \varnothing \ \Rightarrow A = C - B$

b. $A \cup B = U \ \wedge \ A \cap B = \varnothing \Rightarrow A = \complement B$

c. $(A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A) = \varnothing \Leftrightarrow A = B$

d. $(A \cup \complement B) \cap (B \cup \complement A) = U \Leftrightarrow A = B$

e. $(A \cup B) \cap (\complement A \cup \complement B) = \varnothing \Leftrightarrow A = B$

f. $(A \cap B) \cup (\complement A \cap \complement B) = U \Leftrightarrow A = B$

g. $(A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A) = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

h. $(A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement C) = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B \subset C$

i. $(A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A) = B \Leftrightarrow A = \varnothing$

j. Si $A \subset D \ \wedge \ B \subset D$, entonces $A = B \Leftrightarrow D - A = D - B$

k. $(A - B) - C \subset A - (B - C)$

l. $A \subset B \Rightarrow A - (A - B) = A$

12. Probar, mediante un contraejemplo, que la unión no es distributiva respecto a la diferencia. Es decir, no se cumple que:

$$A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C), \quad \forall A, \forall B, \forall C.$$

13. Usando las leyes del álgebra de conjuntos, probar que:

a. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$

b. $A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$

c. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

d. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

e. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

f. $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

g. $(A \cup B) \cap (\complement A \cup B) \cap (A \cup \complement B) = A \cap B$

h. $(A \cap B) \cup (\complement A \cap B) \cup (A \cap \complement B) = A \cup B$

i. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

14. Usando las leyes del álgebra de conjuntos, simplificar:

a. $(A \cup B) \cap (A \cup \complement B)$ **b.** $(A \cap B) \cup \complement(B \cap \complement A)$

c. $\complement[\, A \cap \complement(B \cup \complement A)\,]$ **d.** $(A \cap B) \cup (\complement A \cup \complement B)$

e. $(A \cup B) \cap (A \cup \complement B) \cap (\complement A \cup B) \cap (\complement A \cup \complement B)$

f. $(A \cap B) \cup (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B) \cup (\complement A \cap \complement B)$

15. Probar que:

a. $A \,\Delta\, U = \complement A = U \,\Delta\, A$ **b.** $A \,\Delta\, \complement A = U$

c. $A \,\Delta\, B \subset A \cup B$ **d.** $A \,\Delta\, B = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

e. $A \,\Delta\, B \subset \complement A \cup \complement B$ **f.** $A \,\Delta\, A \,\Delta\, A = A$

g. $A = B \Leftrightarrow A \,\Delta\, B = \varnothing$

16. Usando las leyes del álgebra de conjuntos, probar que:

a. $(A \,\Delta\, B) \cap (A \cap B) = \varnothing$ **b.** $A \cup B = (A \,\Delta\, B) \cup (A \cap B)$

c. $A \cap B = (A \cup B) - (A \,\Delta\, B)$ **d.** $A \Delta B = \complement A \,\Delta\, \complement B$

e. $(A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C) = (A - B) \,\Delta\, (A - C)$

f. $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$

SECCION 4.4
PRODUCTO CARTESIANO

PARES ORDENADOS

Supongamos que tenemos dos elementos a y b. Si decimos que a este par de elementos lo podemos ordenar de dos maneras,

$$ab \text{ y } ba,$$

ninguno de nosotros tiene dificultad en comprender lo que queremos decir. Pero ¿Cómo podríamos definir, en forma precisa, el concepto de par ordenado?. Una manera simple de proceder es considerar los siguientes conjuntos:

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} \text{ y } \{\{b\}, \{a, b\}\}$$

En el primer conjunto, la inclusión $\{ a \} \quad \{ a, b \}$ nos sugiere que a es el primer elemento y que b es el segundo. Podemos, pues identificar el par ordenado ab con este conjunto. En el segundo conjunto, la inclusión $\{ b \} \quad \{ a, b \}$ nos sugiere que b es el primer elemento y a el segundo. Por tanto, podemos identificar al par ordenado ba con este segundo conjunto.

Ahora, al lector no le parecerá extraña la siguiente definición de par ordenado.

DEFINICION Se llama **par ordenado** $\boldsymbol{ab}$ al conjunto

$$(a, b) = \{\{ a \}, \{ a, b \}\}$$

Los elementos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se llaman **primera** y **segunda coordenada** del par ordenado (a, b), respectivamente.

El concepto de par ordenado tiene gran trascendencia. Este permite incorporar la teoría de las relaciones (relación con su sentido usual) a la teoría de conjuntos.

La propiedad fundamental de los pares ordenados, la que a veces se usa para definir par ordenado, es la siguiente

TEOREMA 4.13 $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Demostración

Ver el problema resuelto 4.

COROLARIO $(a, b) = (b, a) \Leftrightarrow a = b$

EJEMPLO 1 Hallar los números reales x que satisfacen:

$$(x^2 - 3x, x - 2) = (-2, -1)$$

Solución

De acuerdo al teorema anterior, tenemos que

$$(x^2 - 3x, x - 2) = (-2, -1) \Leftrightarrow x^2 - 3x = -2 \quad \wedge \quad x - 2 = -1$$

Las soluciones de la primera ecuación son $x = 2$ y $x = 1$, y de la segunda ecuación, $x = 1$. Los x que buscamos deben ser soluciones comunes a ambas ecuaciones, por tanto $x = 1$ es el único número que hace iguales a ambos pares ordenados.

---

nos sugiere que a es el
ficar el par ordenado ab
$b\}$ $\{a, b\}$ nos
, podemos identificar al

n de par ordenado.

y **segunda coordenada**

e permite incorporar la
oría de conjuntos.

veces se usa para definir

-1

la segunda ecuación,
mbas ecuaciones, por
rdenados.

PRODUCTO CARTESIANO

DEFINICION El **producto cartesiano de los conjuntos** A **y** B es el conjunto

$$A \times B = \{ (a, b) \,/\, a \in A \ \wedge \ b \in B \}$$

Al producto $A \times A$ lo abreviaremos con A^2. Esto es, $A^2 = A \times A$.

EJEMPLO 2 Si $A = \{ a, b \}$ y $B = \{ 1, 2, 3 \}$, entonces

a. $A \times B = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$

b. $B \times A = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$

c. $A^2 = \{ (a, a), (a, b), (b, a), (b, b) \}$

Observar que $A \times B \neq B \times A$. Esto es,

El producto cartesiano no es conmutativo.

EJEMPLO 3 Si se tiran dos monedas al aire y si usamos la letra c para representar el resultado de obtener "cara" y la letra s para "sello", el conjunto formado por todos los posibles resultados de tirar las dos monedas es:

$$\{ (c, c), (c, s), (s, c) \text{ y } (s, s) \}$$

Si $A = \{ c, s \}$, entonces el conjunto anterior no es otra cosa que el producto cartesiano $A^2 = A \times A$.

OBSERVACION.

Algún lector alerta podría objetar la definición del producto cartesiano que hemos dado, ya que el axioma de especificación requiere que se tenga un conjunto previo al cual deben pertenecer todos los pares ordenados (a, b). Para responder a esta objeción encontremos un conjunto previo:

Si $a \in A$ y $b \in B$, entonces $\{ a \}$ y $\{ a, b \}$ son subconjuntos de $A \cup B$ y, por tanto, son elementos de $\wp(A \cup B)$. Pero, entonces, el par

$$(a, b) = \{ \{ a \}, \{ a, b \} \}$$

es un subconjunto de $\wp(A \cup B)$. y, por tanto, es un elemento de $\wp(\wp(A \cup B))$.

Con este resultado a mano, podemos definir el producto $A \times B$ con toda la legalidad que el axioma de especificación requiere:

$$A \times B = \{ (a, b) \in \wp(\wp(A \cup B)) \,/\, a \in A \ \wedge \ b \in B \}$$

Uno de los productos cartesianos más importantes es

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) / x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \}$$

La razón para su importancia radica en el hecho de que, mediante un sistema de coordenadas, cada punto del plano puede identificarse con un par ordenado de números reales. De este modo, el plano mismo, puede identificarse como $\mathbb{R}^2$. Como resultado de esta identificación se tiene que la **Geometría Euclideana plana** (la geometría estudiada en la secundaria) puede desarrollarse en términos de pares ordenados de números reales, dando origen a la **Geometría Analítica**. El creador de esta teoría fue **René Descartes**.

¿SABIAS QUE . . .

RENE DESCARTES (1.596-1.650), *filósofo y matemático francés. Nació en la Haya. Es considerado el padre de la filosofía moderna. De él es la famosa frase: "Pienso, luego existo" (Cogito, ergo sum). René Descartes y Pierre de Fermat (1.601-1.665), son considerados como los creadores de la geometría analítica.*

R. Descartes

La identificación de $\mathbb{R}^2$ con el plano nos permite obtener representaciones gráficas de productos cartesianos de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 4 **a.** Sean $A = \{ 2, 3, 4 \}$ y $B = \{ 1, 2 \}$. Graficar el producto

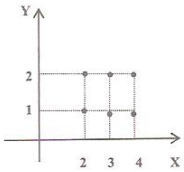
$$A \times B = \{ (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1) (4, 2) \}$$

b. Graficar el producto $[2, 5] \times [1, 2]$, donde $[2, 5]$ y $[1, 2]$ son los intervalos cerrados de números reales:

$$[2, 5] = \{ x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 5 \} \qquad [1, 2] = \{ y \in \mathbb{R} / 1 \leq y \leq 2 \}$$

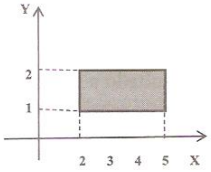
Solución

a.



$A \times B$

b.



[2, 5] × [1, 2]

TEOREMA 4.14

1. $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \ \vee \ B = \varnothing$
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), \forall A, \forall B, \forall C$
3. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C), \forall A, \forall B, \forall C$
4. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C), \forall A, \forall B, \forall C$

Demostración

1. Probaremos el contrarrecíproco: $A \neq \varnothing \ \wedge \ B \neq \varnothing \Leftrightarrow A \times B \neq \varnothing$

$$\begin{aligned} A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing &\Leftrightarrow \exists\, a \in A \ \wedge \ \exists\, b \in B \\ &\Leftrightarrow \exists\, (a, b) \in A \times B \\ &\Leftrightarrow A \times B \neq \varnothing \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ y \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ (y \in B \ \vee \ y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ y \in B) \vee (x \in A \ \wedge \ y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \vee \ (x, y) \in A \times C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

Luego, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

3. Se procede como en 2.

4. $$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B - C) &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ y \in (B - C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ (y \in B \quad y \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in A) \wedge (y \in \mathrm{B} \ \wedge \ y \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ y \in B) \wedge (x \in A \ \wedge \ y \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \ \wedge \ (x, y) \notin A \times C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B - A \times C) \end{aligned}$$

Luego, $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

Observar que las propiedades 2, 3 y 4 dicen que el producto cartesiano es distributivo respecto a la unión, intersección y diferencia, respectivamente.

PROBLEMAS RESUELTOS 4.4

PROBLEMA 1 Probar que

$$A \times C = B \times C \ \wedge \ C \neq \varnothing \ \Rightarrow \ A = B$$

Solución

Como $C \neq \varnothing$, $\exists\, y$ tal que $y \in C$. Ahora

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in B \times C \qquad (A \times C = B \times C) \\ &\Leftrightarrow x \in B \end{aligned}$$

Luego, $A = B$.

PROBLEMA 2 Probar que el producto cartesiano no es asociativo. Esto es,

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C, \forall A, \forall B, \forall C.$$

Solución

Es suficiente hallar un contraejemplo:

Sean $A = \{ 0 \}$, $B = \{ 0 \}$ y $C = \{ 1 \}$.

Tenemos que

$$A \times (B \times C) = \{ (0, (0, 1)) \} \quad \text{y} \quad (A \times B) \times C = \{ ((0, 0), 1) \}$$

Es evidente que $(0, (0, 1)) \neq ((0, 0), 1)$

Luego, $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$.

PROBLEMA 3 Si $A \subset X$ y $B \subset Y$ probar que

$$\complement_{X \times Y}(A \times B) = \left[(\complement_X A) \times Y \right] \cup \left[X \times \complement_Y B \right]$$

Solución

$$\begin{aligned} (x, y) \in \complement_{X \times Y}(A \times B) &\Leftrightarrow (x, y) \in X \times Y \ \wedge \ (x, y) \notin A \times B \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in X \times Y \ \wedge \ \sim[\, (x, y) \in A \times B \,] \\ &\Leftrightarrow [\, x \in X \ \wedge \ y \in Y \,] \wedge \sim[\, x \in A \ \wedge \ y \in B \,] \\ &\Leftrightarrow [\, x \in X \ \wedge \ y \in Y \,] \ \wedge \ [\, x \notin A \ \vee \ y \notin B \,] \\ &\Leftrightarrow [\, (x \in X \wedge x \notin A) \wedge y \in Y \,] \vee [\, x \in X \wedge (y \in Y \wedge y \notin B) \,] \\ &\Leftrightarrow [\, x \in \complement_X A \ \wedge \ y \in Y \,] \vee [\, x \in X \ \wedge \ y \in \complement_Y B \,] \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \complement_X A \times Y \ \vee \ (x, y) \in X \times \complement_Y B \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ (x, y) \in (\complement_X A \times Y) \cup (X \times \complement_Y B)$$

Luego, $\complement_{X \times Y}(A \times B) = \left[(\complement_X A) \times Y\right] \cup \left[X \times \complement_Y B\right]$

PROBLEMA 4 Probar el teorema 4.13:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Solución

$(\Leftarrow)$ Si $a = c \wedge b = d$, entonces $\{a\} = \{c\}$ y $\{a, b\} = \{c, d\}$. Luego

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} = (c, d)$$

$(\Rightarrow)$ Si $(a, b) = (c, d)$, entonces $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$

Tenemos dos posibilidades:

1. $\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}$ ó **2.** $\{a\} = \{c, d\} \wedge \{a, b\} = \{c\}$

Supongamos que se cumple **1.**

De $\{a\} = \{c\}$, obtenemos que $a = c$

De $\{a, b\} = \{c, d\}$, como $a = c$, obtenemos que $b = d$.

Luego, $a = c \wedge b = d$.

Ahora supongamos que se cumple **2.**

De $\{a\} = \{c, d\}$, obtenemos que $a = c \wedge a = d$.

De $\{a, b\} = \{c\}$, obtenemos que $a = c \wedge b = c$.

Luego, $a = b = c = d$ y, en particular, $a = c \wedge b = d$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.4

1. Probar que:

a. $A \subset B \Rightarrow A \times C \subset B \times C$

b. $A \subset B \Rightarrow C \times A \subset C \times B$

c. $A \subset B \wedge C \subset D \Rightarrow A \times C \subset B \times D$

d. $A \times C \subset B \times C \wedge C \neq \varnothing \Rightarrow A \subset B$

e. Si $A \times B \neq \varnothing$, entonces $A \times B \subset C \times D \Leftrightarrow A \subset C \wedge B \subset D$.

2. Probar que:

a. $A \times A = B \times B \Leftrightarrow A = B.$

b. $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B \vee A = \varnothing \vee B = \varnothing$

c. $(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D).$

3. Si $A = \{ \varnothing \}$, hallar $\wp(A \times A)$.

SECCION 4.5
OPERACIONES GENERALIZADAS

Las operaciones de unión, intersección y producto cartesiano han sido definidas para dos de conjuntos. En esta sección extendemos estas nociones a familias de conjuntos.

Consideremos una familia finita de conjuntos $\{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}$

Aquí, cada miembro A_i de la familia es identificado por un índice i. Al conjunto formado por todos los índices, $\mathrm{I} = \{ 1, 2, \ldots, n \}$
lo llamaremos **conjunto de índices** de la familia, y de $\{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}$ diremos que es una **familia indexada** de conjuntos, y la denotaremos por

$$\{ \mathbf{A}_i \}_{i \in \mathbf{I}}$$

EJEMPLO 1 Sea la familia indexada $\{ A_i \}_{i \in \mathrm{I}}$, donde $\mathrm{I} = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ y

$$A_i = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, i - 1 \leq x \leq i + 2 \}$$

Determinar por extensión cada miembro de esta familia.

Solución

$$A_1 = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, 1 - 1 \leq x \leq 1 + 2 \} = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, 0 \leq x \leq 3 \} = \{ 0, 1, 2, 3 \}$$

$$A_2 = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, 2 - 1 \leq x \leq 2 + 2 \} = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq x \leq 4 \} = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$A_3 = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, 3 - 1 \leq x \leq 3 + 2 \} = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, 2 \leq x \leq 5 \} = \{ 2, 3, 4, 5 \}$$

$$A_4 = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, 4 - 1 \leq x \leq 4 + 2 \} = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, 3 \leq x \leq 6 \} = \{ 3, 4, 5, 6 \}$$

EJEMPLO 2 Sea la familia indixada $\{ B_j \}_{j \in \mathrm{J}}$, $\mathrm{J} = \{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$ y

$$B_j = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, 49 < x < 61 \wedge x \text{ es múltiplo de } j \}$$

Determinar por extensión cada miembro de esta familia.

Solución

$B_2 = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, 49 < x < 61 \ \wedge \ x \text{ es múltiplo de } 2 \} = \{ 50, 52, 54, 56, 58, 60 \}$

$B_3 = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, 49 < x < 61 \ \wedge \ x \text{ es múltiplo de } 3 \} = \{ 51, 54, 57, 60 \}$

$B_4 = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, 49 < x < 61 \ \wedge \ x \text{ es múltiplo de } 4 \} = \{ 52, 56, 60 \}$

$B_5 = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, 49 < x < 61 \ \wedge \ x \text{ es múltiplo de } 5 \} = \{ 50, 55, 60 \}$

$B_6 = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, 49 < x < 61 \ \wedge \ x \text{ es múltiplo de } 6 \} = \{ 54, 60 \}$

Las familias de conjuntos dadas en los dos ejemplos anteriores son familias finitas, Esto es, las familias tienen un número finito de miembros. Podemos considerar también familias infinitas. Aún más, podemos considerar familias cuyo conjunto de índices no es un conjunto de números.

EJEMPLO 3 Si a cada número natural n le asignamos el conjunto

$$C_n = \{ x \in \mathbb{Z} \,/\, -n < x < n \},$$

entonces obtenemos la familia

$$\{ C_n \}_{n \in \mathbb{N}},$$

que es una familia infinita cuyo conjunto de índices es el conjunto $\mathbb{N}$.

Algunos miembros de esta familia son los siguientes conjuntos:

$$C_0 = \{ 0 \}, \qquad C_1 = \{ -1, 0, 1 \}, \qquad C_2 = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \},$$

$$C_3 = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}, \qquad C_4 = \{ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \}$$

EJEMPLO 4 Consideremos el conjunto $X = \{ a, b, c, d, e \}$ y la siguiente familia de subconjuntos de X:

$$\{ \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ d \}, \{ e \} \} \qquad \textbf{(1)}$$

Si a cada elemento $x \in X$ le asignamos el conjunto unitario $D_x = \{ x \}$, entonces la familia (1) anterior queda expresada como la familia indexada,

$$\{ D_x \}_{x \in X}$$

En este caso, el conjunto de índices es el conjunto X, que es un conjunto finito cuyos elementos no son números.

Ahora vamos a definir la unión e intersección de una familia indexada de conjuntos. Para guiarnos, analicemos primero el caso simple de una familia de tres conjuntos $\{ A_1, A_2, A_3 \}$, indexada por $\mathrm{I} = \{ 1, 2, 3 \}$.

Sabemos que la unión $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ está formada por los elementos que pertenecen a alguno de los tres conjuntos. Esto es,

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \iff x \in A_1 \ \vee \ x \in A_2 \ \vee \ x \in A_3$$

O bien,

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \iff \exists\, i \in \mathrm{I} = \{ 1, 2, 3 \} \text{ tal que } x \in A_i \qquad \textbf{(1)}$$

Análogamente, la intersección $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ está formada por los elementos que pertenecen a los tres conjuntos. Esto es,

$$x \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \iff x \in A_1 \ \wedge \ x \in A_2 \ \wedge \ x \in A_3$$

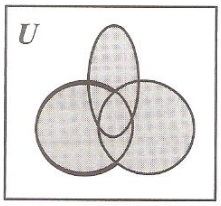
O bien,

$$x \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \iff \forall\, i \in \mathrm{I} = \{ 1, 2, 3 \},\ x \in A_i \qquad \textbf{(2)}$$

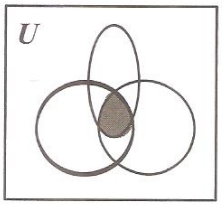
Las expresiones (1) y (2) anteriores nos sugieren la siguiente definición,

DEFINICION Sea $\{ A_i \}_{i \in \mathrm{I}}$ una familia indexada de conjuntos,

1. La **unión** de esta familia es el conjunto
$$\bigcup_{i \in \mathrm{I}} A_i = \{ x \in U \,/\, \exists\, i \in \mathrm{I} \text{ tal que } x \in A_i \}$$
2. La **intersección** de esta familia es el conjunto
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x \in U \,/\, \forall\, i \in \mathrm{I}, x \in A_i \}$$



$\bigcup_{i \in \mathrm{I}} A_i$



$\bigcap_{i \in \mathrm{I}} A_i$

NOTACION Si el conjunto de índices es $\mathrm{I} = \{ n, n+1, n+2, \ldots, m \}$, también se acostumbra denotar la unión e intersección, respectivamente, por

$$\bigcup_{i=n}^{m} A_i \quad \text{y} \quad \bigcap_{i=n}^{m} A_i .$$

EJEMPLO 5 Sea la familia $\{ A_i \}_{i \in \mathrm{I}}$, donde $\mathrm{I} = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ y

$$A_1 = \{ 2, 5, 7 \}, \qquad A_2 = \{ 1, 2, 7, 9 \}, \qquad A_3 = \{ 0, 2, 4, 7 \},$$
$$A_4 = \{ 1, 2, 5, 8, 9 \}$$

se tiene que:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{2\}$$

EJEMPLO 6 Si $\{B_j\}_{j\in J}$ es la familia del ejemplo 2, donde $J = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ y

$$B_j = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 49 < x < 61 \wedge x \text{ es múltiplo de } j\}$$

entonces

$$\bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{j=2}^{6} B_j = B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 = \{50, 51, 52, 54, 55, 57, 58, 60\}$$

$$\bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{j=2}^{6} B_j = B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6 = \{60\}.$$

EJEMPLO 7 Si $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la familia del ejemplo 3, donde el conjunto de índices es el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, y

$$C_n = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -n < x < n\},$$

entonces

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z} \text{ y } \bigcap_{n=0}^{\infty} Cn = \{0\}$$

EJEMPLO 8 Si $\{D_x\}_{x\in X}$ es la familia del ejemplo 4, donde el conjunto de índices es $X = \{a, b, c, d, e\}$, entonces

$$\bigcup_{x\in X} D_x = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\} \cup \{d\} \cup \{e\} = X$$

$$\bigcap_{x\in X} D_x = \{a\} \cap \{b\} \cap \{c\} \cap \{d\} \cap \{e\} =$$

TEOREMA 4.15 Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia indexada de conjuntos. Entonces

1. $A_k \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, $\forall\, k \in I$
2. $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_k$, $\forall\, k \in I$
3. $C(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} (CA_i)$
4. $C(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} (CA_i)$

Demostración

1. A_k es uno de los miembros de la familia, Luego, se tiene que $A_k \subset \bigcup_{i \in I} A_i$

2. $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow x \in A_i, \forall i \in I \Rightarrow x \in A_k$. Luego, $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_k$

3. $x \in \complement(\bigcup_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \sim(x \in \bigcup_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow \sim(\exists\, i \in I \text{ tal que } x \in A_i)$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I, x \notin A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in \complement A_i \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} (\complement A_i)$$

Luego, $\complement(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (\complement A_i)$

4. Similar a 3.

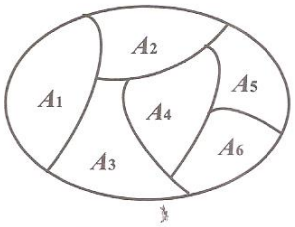
PARTICION

Un concepto importante que aparecerá mas adelante y que tiene que ver con la idea de familia de conjuntos es el de partición de un conjunto.

DEFINICION Sea X un conjunto y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de X. $\{A_i\}_{i \in I}$ es una **partición de X** si y sólo si

1. $A_i \neq \varnothing, \ \forall i \in I$
2. $A_i \cap A_j = \varnothing, \ \forall i \in I$ y $\forall j \in I$ tales que $i \neq j$.
3. $X = \bigcup_{i \in I} A_i$

Cada subconjunto A_i es una **celda** o un **bloque** de la partición.



En términos simples, una partición de X es una familia de subconjuntos no vacíos de X que son disjuntos dos a dos y cuya unión es todo X. Si a X lo pensamos como una torta de cumpleaños, entonces una partición de X está constituida por la colección de todas las porciones individuales en que se ha cortado la torta. En efecto, cada porción es no vacía, dos porciones distintas son disjuntas y si unimos todas las porciones obtenemos la torta completa.

EJEMPLO 9 Si $X = \{ a, b, c, d, e, f, g \}$, $A_1 = \{ a, b \}$, $A_2 = \{ c, e, g \}$ y $A_3 = \{ d, f \}$, entonces la familia

$$\{ A_1 , A_2 , A_3 \}$$

es una partición de X.

EJEMPLO 10 Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$B_0 = \{ x \in \mathbb{Z} \ / \ x = 5k, \ k \in \mathbb{Z} \} = \{ \ldots -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots \}$$

$$B_1 = \{ x \in \mathbb{Z} \ / \ x = 5k + 1, k \in \mathbb{Z} \} = \{ \ldots -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots \}$$

$$B_2 = \{ x \in \mathbb{Z} \ / \ x = 5k + 2, k \in \mathbb{Z} \} = \{ \ldots -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots \}$$

$$B_3 = \{ x \in \mathbb{Z} \ / \ x = 5k + 3, k \in \mathbb{Z} \} = \{ \ldots -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots \}$$

$$B_4 = \{ x \in \mathbb{Z} \ / \ x = 5k + 4, k \in \mathbb{Z} \} = \{ \ldots -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots \}$$

La familia $\{ B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 \}$ es una partición de $\mathbb{Z}$.

EJEMPLO 11 La familia $\{ C_n \}_{n \in \mathbb{Z}}$, donde C_n es el intervalo de números reales:

$$C_n = [n, n + 1) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ n \leq x < n + 1 \}$$

es una partición de $\mathbb{R}$.

PRODUCTO CARTESIANO DE UN NUMERO FINITO DE CONJUNTOS

Sean A, B y C tres conjuntos. El producto cartesiano de A, B y C es

$$\boldsymbol{A \times B \times C = (A \times B) \times C}$$

Los elementos de $A \times B \times C$ son pares ordenados de la forma:

$$((a, b), c), \text{ donde } a \in A, b \in B, c \in C,$$

a los que los denotaremos simplemente como (a, b, c) y los llamaremos **tríadas ordenadas**.

Si los tres conjuntos son iguales, en lugar de $A \times A \times A$ escribiremos A^3. Esto es

$$A^3 = A \times A \times A.$$

Un ejemplo muy importante de este caso es

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R} \}$$

Este conjunto, provisto de una estructura adicional, sirve como modelo para el "espacio tridimensional".

EJEMPLO 12 Si $A = \{ a, b \}$, $B = \{ \alpha, \beta \}$, $C = \{ 1, 2 \}$, entonces

$$A \times B \times C =$$

$$\{ (a, \alpha, 1), (a, \alpha, 2), (a, \beta, 1), (a, \beta, 2), (b, \alpha, 1), (b, \alpha, 2), (b, \beta, 1), (b, \beta, 2) \}$$

El producto cartesiano de los cuatro conjuntos A, B, C y D lo definimos como

$$\boldsymbol{A \times B \times C \times D = (A \times B \times C) \times D},$$

y a sus elementos $((a, b, c), d)$ los denotaremos como (a, b, c, d) y los llamaremos **cuádruples ordenadas**.

PROBLEMAS RESUELTOS 4.5

PROBLEMA 1 Sea n natural y $A_n = \{ x \in \mathbb{N} / x \text{ es múltiplo de } n \}$. Hallar:

a. $A_4 \cap A_6$ **b.** $A_4 \cup A_6$ **c.** $\bigcap_{n=2}^{7} A_n$

d. $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ **e.** $\bigcup_{n=5}^{\infty} A_n$ **f.** $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$

Solución

a. Los elementos de $A_4 \cap A_6$ son los números naturales que son, a la vez, múltiplos de 4 y de 6. Luego, estos son los múltiplos de mínimo común múltiplo de 4 y 6, que es 12, En consecuencia: $A_4 \cap A_6 = A_{12}$.

b. Tenemos que $A_4 = \{ 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots \}$ y $A_6 = \{ 0, 6, 12, 18, 24, \ldots \}$

Luego, $A_4 \cup A_6 = \{ 0, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, \ldots \}$.

c. $\bigcap_{n=2}^{7} A_n$ es el conjunto de números naturales que son, a la vez, múltiplos de 2, 3, 4, 5, 6, y 7. Luego, estos son los múltiplos de su mínimo común múltiplo, que es, 420. Esto es,

$$\bigcap_{n=2}^{7} A_n = A_{420}.$$

d. $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ es el conjunto de números naturales que son múltiplos de algún número natural. Como todo número natural es siempre múltiplo de algún otro, tenemos:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \mathbb{N}.$$

e. $\bigcup_{n=5}^{\infty} A_n$ es el conjunto de números naturales que son múltiplos de algún número natural $n \geq 5$. Luego,

$$\bigcup_{n=5}^{\infty} A_n = \{ 0, 5, 6, 7, 8, \ldots \} = \mathbb{N} - \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

f. $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ es el conjunto de números naturales que son, a la vez, múltiplos de todos los números naturales. Como, $\forall\, n$, $0 = 0n$, 0 es múltiplo de todos los naturales. Aún más, 0 es el único que tiene esta propiedad. Luego,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \{ 0 \}$$

PROBLEMA 2 Sea n un número natural tal que $n \geq 1$ y sea C_n el intervalo cerrado de números reales **[0, 1/*n*]**. Es decir, $C_n = [0, 1/n]$. Hallar:

a. $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ **b.** $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$

Solución

a. Como para todo $n \geq 1$ se cumple que $C_n = [0, 1/n]$ $[0, 1] = C_1$, entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C_1 = [0, 1]$$

b. Se tiene que $0 \in C_n$, $n \geq 1$. Además 0 es el único elemento que cumple con esta propiedad. En efecto, para cualquier número real $x > 0$ existe un natural $n \geq 1$ tal que $1/n < x$. En consecuencia,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{ 0 \}$$

PROBLEMA 3 Sea B un conjunto y $\{ A_i \}_{i \in I}$ una familia de conjuntos. Probar:

1. $B \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$ **2.** $B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$

Solución

1. $x \in B \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow x \in B \vee x \in \bigcap_{i \in I} A_i$

$\Leftrightarrow x \in B \vee (x \in A_i, \forall i \in I)$

$\Leftrightarrow (x \in B \vee x \in A_i), \forall i \in I$

$\Leftrightarrow (x \in B \cup A_i), \forall i \in I$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$

Luego, $B \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$

2. Similar a 1.

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.5

1. Si $A_1 = \{ a, b, x, y \}, A_2 = \{ b, x, y \}$, $A_3 = \{ b, y, z \}$, $A_4 = \{ b, y, x, z \}$, hallar:

a. $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$ **b.** $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$ **c.** $\bigcup_{i=2}^{4} A_i$ **d.** $\bigcap_{i=2}^{4} A_i$

2. Si $P_n = \{ n, n+1, n+2, \ldots, 2n \}$, hallar:

a. $\bigcup_{n=1}^{5} P_n$ **b.** $\bigcap_{n=1}^{5} P_n$ **c.** $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ **d.** $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$

3. Si $X_n = [1, 1 + 1/n]$ y $I = \{ 2, 5, 6, 7 \}$, hallar:

a. $\bigcup_{n \in I} X_n$ **b.** $\bigcap_{n \in I} X_n$ **c.** $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ **d.** $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$

4. Si $Y_n = [1, 1 + 1/n)$ y $I = \{ 2, 5, 6, 7 \}$, hallar:

a. $\bigcup_{n \in I} Y_n$ **b.** $\bigcap_{n \in I} Y_n$ **c.** $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ **d.** $\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$

5. Si $B_n = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x \, \mathbb{C} \, n \}$, hallar:

a. $\bigcup_{n=1}^{20} B_n$ **b.** $\bigcap_{n=1}^{20} B_n$ **c.** $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ **d.** $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

6. Si $M_n = \{ x \in \mathbb{N} \ / \ x$ es múltiplo de $n \}$ y P el conjunto números primos, hallar:

a. $\bigcup_{n=1}^{8} M_n$ b. $\bigcap_{n=1}^{8} M_n$ c. $\bigcup_{n \in P} M_n$ d. $\bigcap_{n \in P} M_n$

7. Si $\{ A_i \}_{i \in I}$ y $\{ B_i \}_{i \in I}$ son dos familias de conjuntos, indexada por el mismo conjunto I, y se cumple que $A_i \subset B_i$, $\forall i \in I$, probar que:

a. $\bigcup_{i \in I} A_i \subset \bigcup_{i \in I} B_i$ b. $\bigcap_{i \in I} A_i \subset \bigcap_{i \in I} B_i$

8. Sea $\{ A_i \}_{i \in I}$ una familia indexada de conjuntos . Si $J \subset I$, probar que:

a. $\bigcup_{i \in J} A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ b. $\bigcap_{i \in I} A_i \subset \bigcap_{i \in J} A_i$

9. Si $\{ A_i \}_{i \in I}$ y $\{ B_j \}_{j \in J}$ son dos familias indexadas de conjuntos, probar que:

a. $\left[\bigcup_{i \in I} A_i \right] \cap \left[\bigcup_{j \in J} B_j \right] = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} \left[A_i \cap B_j \right]$

b. $\left[\bigcap_{i \in I} A_i \right] \cup \left[\bigcap_{j \in J} B_j \right] = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} \left[A_i \cup B_j \right]$

10. Sea $\{ A_i \}_{i \in I}$ una familia indexada de conjuntos, probar que:

a. $\bigcap_{i \in I} \wp(A_i) = \wp\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$ b. $\bigcup_{i \in I} \wp(A_i) \subset \wp\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$

11. Si $X = \{ a, b, c, d, e, f \}$. ¿Cuáles de las siguientes familias de subconjuntos de X constituyen particiones de X?

a. $\{ \{ b, d \}, \{ a, b, c \}, \{ c, f \} \}$ b. $\{ \{ b, d \}, \{ a, e \}, \{ c, f \} \}$

c. $\{ \{ a, e \}, \{ b, d \}, \{ c \}, \{ b, f \} \}$ d. $\{ X \}$

12. Hallar todas las particiones del conjunto $X = \{ a, b, c \}$.

13. Si $\{ A_i \}_{i \in I}$ es una partición de X y $\{ B_j \}_{j \in J}$ es una partición de Y, probar que $\{ A_i \times B_j \}_{(i,j) \in I \times J}$ es una partición de $X \times Y$.

14. Probar que en las tríadas ordenadas se cumple que:

$$(a, b, c) = (x, y, z) \Leftrightarrow a = x \ \wedge \ b = y \ \wedge \ c = z.$$

SECCION 4.6
REPRESENTACION COMPUTACIONAL DE CONJUNTOS

Veamos como se enfoca es estudio de los conjuntos a través de la computación.

Los conjuntos que consideraremos serán todos subconjuntos de un conjunto finito U, el cual será nuestro conjunto referencial. Supongamos U tiene n elementos y que estos estén ordenados de algún modo. Digamos, por ejemplo, que

$$U = \{ x_1 , x_2, \ldots , x_n \},$$

donde los elementos de U están ordenados de acuerdo a sus subíndices.

En la lógica proposicional se toma a 0 y 1 como los posibles valores lógicos de las proposiciones. En computación, estos valores tienen ya un nombre muy conocido: **bits**. Con estos dos elementos formamos el conjunto $X = \{0, 1\}$ y, con éste, el producto cartesiano

$$X^n = \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n}$$

Los elementos de X^n son n-uplas ordenadas:

$$V = (a_1, a_2, \ldots , a_n),$$

donde cada entrada a_i es un bit: 0 ó 1. A estas n-uplas ordenadas, o cadenas de n bits, las llamaremos ***vectores binarios.***

La idea es hacer corresponder a cada subconjunto de U un único vector binario, de tal modo que obtengamos una correspondencia biunívoca de $\wp(U)$ en el producto cartesiano X^n. Esta correspondencia biunívoca nos permite traducir, entre otras cosas, las operaciones entre conjuntos en operaciones entre vectores binarios y viceversa. Veamos esta correspondencia.

Sea A un subconjunto de $U = \{ x_1 , x_2 , \ldots , x_n \}$ y sea V_A el vector binario que representa a A. Tomemos el primer elemento x_1 de U. Si x_1 es el elemento de A, o sea si el valor lógico de $x_i \in A$ es 1, entonces colocamos 1 como primera componente del vector V_A. En cambio, si x_1 no es elemento de A, o sea si el valor lógico de $x_i \in A$ es 0, colocamos 0 como primera componente de V_A. En forma similar se procede con cada uno de los elementos de U. En resumen:

Si $A \in \wp(U)$, o sea si $A \subset U$, al conjunto A le corresponde el vector binario

$$V_A = (a_1, a_2, \ldots , a_n), \quad \text{donde } a_i = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i \in A \\ 0, & \text{si } x_i \notin A \end{cases}$$

Así, tenemos que:

1. Al conjunto $\varnothing$ le corresponde el vector binario $V = (0, 0, 0, \ldots, 0)$
2. Al conjunto $A = \{ x_1 \}$ le corresponde el vector $V_A = (1, 0, 0, \ldots, 0)$
3. Al conjunto $B = \{ x_2 \}$ le corresponde el vector $V_B = (0, 1, 0, 0, \ldots, 0)$
4. Al conjunto $C = \{ x_n \}$ le corresponde el vector $V_C = (0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$
5. Al conjunto $D = \{ x_1, x_2 \}$ le corresponde el vector $V_D = (1, 1, 0, 0, \ldots, 0)$
6. Al conjunto $F = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ le corresponde el vector $V_F = (1, 1, 1, 0, \ldots, 0)$
7. Al conjunto U le corresponde el vector binario $V_U = (1, 1, \ldots, 1)$.

EJEMPLO 1 Sea el conjunto $U = \{ a, b, c, d, e, f \}$, donde a sus elementos les damos el orden alfabético.

a. Hallar el vector binario que corresponde al conjunto $A = \{b, c, f\}$

b. ¿A qué conjunto representa el vector $V = (1, 0, 1, 1, 0, 1)$?

Solución

a. El vector correspondiente a $A = \{ b, c, f \}$ es $V_A = (0, 1, 1, 0, 0, 1)$

b. El conjunto correspondiente a V = (1, 0, 1, 1, 0, 1) es B = {a, c, d, f }.

OPERACIONES Y VECTORES BINARIOS

Las distintas operaciones de conjuntos se efectúan mediante operaciones de vectores binarios del modo siguiente:

Sean A y B dos subconjuntos de U y sean

$$V_A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{y} \quad V_B = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

sus vectores binarios correspondientes. Entonces el vector binario de:

1. $A \cup B$ es $V_{A \cup B} = (\max \{a_1, b_1\}, \max \{a_2, b_2\}, \ldots, \max \{a_n, b_n\})$

2. $A \cap B$ es $V_{A \cap B} = (\min \{a_1, b_1\}, \min \{a_2, b_2\}, \ldots, \min \{a_n, b_n\})$

3. $\complement A$ es $V_{\complement A} = (1 - a_1, 1 - a_2, \ldots, 1 - a_n)$

4. $A - B$ es $V_{A-B} = (\min \{a_1, 1 - b_1\}, \min \{a_2, 1 - b_2\}, \ldots, \min \{a_n, 1 - b_n\})$

5. $A \Delta B$ es $V_{A \Delta B} = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|)$

Las igualdades anteriores se entienden claramente si nos acordamos que la unión, la intersección, el complemento y la diferencia simétrica de conjuntos corresponden a la disyunción, conjunción, negación y disyunción exclusiva de proposiciones y que:

1. $\mathrm{VL}(p \vee q) = \max\{\mathrm{VL}(p), \mathrm{VL}(q)\}$
2. $\mathrm{VL}(p \wedge q) = \min\{\mathrm{VL}(p), \mathrm{VL}(q)\}$
3. $\mathrm{VL}(_p) = 1 - \mathrm{VL}(p)$
4. $\mathrm{VL}(p \underline{\vee} q) = |\mathrm{VL}(p) - \mathrm{VL}(q)|$

EJEMPLO 2 Sea $U = \{a, b, c, d, e, f\}$. Si

$V_A = (1, 0, 0, 1, 0, 1)$ y $V_B = (0, 1, 0, 1, 0, 1)$, Hallar:

1. $V_{A \cup B}$ y $A \cup B$
2. $V_{A \cap B}$ y $A \cap B$
3. $V_{\complement A}$ y $\complement A$
4. V_{A-B} y $A - B$
5. $V_{A \Delta B}$ y $A \Delta B$

Solución

Tenemos que $V_A = (1, 0, 0, 1, 0, 1)$ y $V_B = (0, 1, 0, 1, 0, 1)$. Entonces,

1. $V_{A \cup B} = (\max\{1, 0\}, \max\{0, 1\}, \max\{0, 1\}, \max\{1, 1\}, \max\{0, 0\}, \max\{1, 1\})$

   $= (1, 1, 1, 1, 0, 1)$.

   Luego, $A \cup B = \{a, b, d, f\}$.

2. $V_{A \cap B} = (\min\{1, 0\}, \min\{0, 1\}, \min\{0, 0\}, \min\{1, 1\}, \min\{0, 0\}, \min\{1, 1\})$

   $= (0, 0, 0, 1, 0, 1)$

   Luego, $A \cap B = \{d, f\}$.

3. $V_{\complement A} = (1-1, 1-0, 1-0, 1-1, 1-0, 1-1) = (0, 1, 1, 0, 1, 0)$.

   Luego, $\complement A = \{b, c, e\}$

4. $V_{A-B} = (\min\{1, 1-0\}, \min\{0, 1-1\}, \min\{0, 1-0\}, \min\{1, 1-1\},$
   $\min\{0, 1-0\}, \min\{1, 1-1\}) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$

   Luego, $A - B = \{a\}$

5. $V_{A \Delta B} = (|1-0|, |0-1|, |0-0|, |1-1|, |0-0|, |1-1|)$

   $= (1, 1, 0, 0, 0, 0)$

   Luego, $A \Delta B = \{a, b\}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.6

1. Sea $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$, con el orden usual.

   a. Hallar el vector binario correspondiente a cada uno de los siguientes conjuntos:

   i. **ii.** $A = \{ 2, 4, 8 \}$ **iii.** $B = \{ 1, 3, 4, 7, 8 \}$

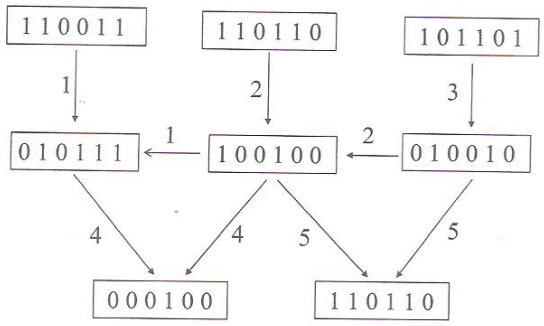
   iv. $C = \{ 2, 4, 6, 8 \}$ **v.** $D = \{ 5, 6, 7, 8 \}$ **vi.** $E = \{1, 2, 3, 4 \}$

   b. Usando los vectores binarios hallados en la parte a, hallar:

   i. $\complement$ **ii.** $\complement A$ **iii.** $A \cup B$ **iv.** $A \cap B$

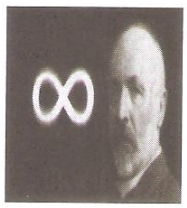
   v. $E - B$ **vi.** $B \Delta E$ **vii.** $B \cap \complement(A \cap D)$ **viii.** $A \cup (B \Delta D)$

2. En el siguiente diagrama de vectores binarios, las flechas que llevan el mismo número indican que se han operado los vectores donde las felchas se inician, dando como resultado el vector donde las flechas terminan. Determinar las operaciones de conjunto correspondiente a cada caso.



BREVE HISTORIA DE LA TEORIA DE CONJUNTOS

La teoría de conjuntos ocupa un lugar privilegiado en las ramas de la matemática debido a que todas estas otras necesitan, para su formulación, las herramientas desarrolladas en la teoría de conjuntos.



GEORG CANTOR *(1.845–1.918) es considerado el fundador de la teoría de conjuntos, vista ésta como una disciplina de la matemática. La teoría nació como resultado de sus investigaciones acerca de ciertos tipos de conjuntos infinitos de números reales.*

En 1.874, Cantor publicó un sorprendente trabajo, en el que demuestra, entre otras cosas, que a pesar de que el conjunto de números naturales es un subconjunto propio del conjunto de números racionales, ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos. Demuestra también que el número de elementos del conjunto de números reales es mayor que el número de elementos del conjunto de números naturales. Pero, siendo conjuntos infinitos, esto significa que existe más de una categoría de infinitos. En efecto, él descubre que existen infinitos infinitos y, aún más sorprendente, construye una aritmética de infinitos que se comporta de una manera similar a la aritmética de los números naturales.

Inicialmente, la publicación de la investigación fue rechazada, a instancias de un árbitro, ***Leopold Kronecker*** *(Alemán, 1.823–1.891). Felizmente, gracias a los buenos oficios de* ***Richard Dedekind*** *(Alemán, 1.813–1.916) el trabajo salió de la imprenta con el nombre de "Sobre una Propiedad Característica de los Números Algebraicos Reales"*

El aspecto revolucionario de la teoría descansaba en el hecho de tratar a los conjuntos infinitos como objetos matemáticos, en la forma como son tratados los conjuntos finitos. Gran parte del mundo matemático, desde la antigüedad, había rechazado este punto de vista. Por esta razón, el trabajo de Cantor fue foco de fuertes críticas. Esta actitud comienza a cambiar alrededor del año 1.890. En 1.900, la teoría de conjuntos fue reconocida como una rama legítima de la matemática. Sin embargo, por estos mismos años la teoría sufre un fuerte golpe, cuando se descubren paradojas (proposiciones que son ciertas y falsas al mismo tiempo),

como la de ***Burali-F***
la imperiosa necesi
método axiomático.
primera formulación
Fraenkel *(Alemán,*
sistema se le
Zermelo–Fraenkel–
Neumann–Bernays–
(Húngaro, 1.903–1.9
(Checoslovaco, 1.906

E. Zermelo

De los tres últim
Neumann. *Además*
contribuciones a la ci
juego, una disciplina
aplicaciones en la eco
de Estudios Avanzado
ingresó ***Albert Einste***
archivado flexible. Fu
Unidos y, durante la Se
atómica de los Alamos.
Algunos de los
continuación. El capítu
desarrollado siguiendo

*como la de **Burali-Forti** (1.897) y la de **B. Russell**. (1.901). Por esta razón, se sintió la imperiosa necesidad de reconstruir la teoría sobre bases sólidas, mediante el método axiomático. En 1.908, **Ernest Zermelo** (Alemán, 1.871–1.953) presentó la primera formulación axiomática, la cual fue complementada en 1.822 por **Adolf Fraenkel** (Alemán, 1.891–1.965) y **T. A. Skolem** (Noruego, 1.906–1.978). A este sistema se le conoce con el nombre de sistema axiomático **Zermelo–Fraenkel–Skolem.** Se tiene también el sistema axiomático **Neumann–Bernays–Gödel**, creado por los matemáticos **John Von Neumann** (Húngaro, 1.903–1.957), **Paul I. Bernays** (Inglés, 1.888–1.977) y **Kurt Gödel** (Checoslovaco, 1.906–1.978)*

E. Zermelo

A. Fraenkel

J. Von Neumann

P. I. Bernays

*De los tres últimos matemáticos nombrados, él más polifacético fue **Von Neumann.** Además de sus aportes a la teoría de conjuntos, hizo importantes contribuciones a la ciencia del siglo XX. Es uno de los creadores de la teoría de juego, una disciplina que analiza matemáticamente situaciones competitivas y tiene aplicaciones en la economía, sociología, política, etc. En 1.933 se unió al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton (New Jersey, USA), en la misma época que ingresó **Albert Einsten**. Diseñó la primera computadora que usaba un programa archivado flexible. Fue miembro de la Comisión de Energía Atómica de Estados Unidos y, durante la Segunda Guerra Mundial, fue asesor del proyecto de la bomba atómica de los Alamos.*

*Algunos de los axiomas de **Zermelo-Fraenkel-Skolen** presentamos a continuación. El capítulo de conjunto de la primera edición del presente texto, fue desarrollado siguiendo estos axiomas.*

AXIOMAS DE LA TEORIA DE CONJUNTOS

1. ***Axioma de existencia.*** *Existe un conjunto.*

2. ***Axioma de extensión.*** $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

3. ***Axioma de especificación.*** *Para todo conjunto A y para toda función proposicional P(x) con dominio el conjunto A, corresponde un conjunto B cuyos elementos son precisamente los elementos x de A para los cuales P(x) es verdadera.*

4. ***Axioma del par.*** *Para cualquier par de elementos a y b existe un conjunto A que contiene ambos elementos; es decir, existe un conjunto A tal que* $a \in A$ *y* $b \in A$.

5. ***Axioma de la unión.*** *Para toda familia de conjuntos existe un conjunto que contiene a todos los elementos que pertenecen cuando menos a uno de los conjuntos de la familia.*

6. ***Axioma de las potencias.*** *Para todo conjunto existe otro conjunto que tiene entre sus elementos a todos los subconjuntos del conjunto.*

7. ***Axioma del infinito.*** *Existe un conjunto sucesor.*

ONJUNTOS

$\in B$)

y para toda función
de un conjunto B cuyos
ra los cuales P(x) es

xiste un conjunto A que
tal que $a \in A$ y $b \in A$.

existe un conjunto que
menos a uno de los

tro conjunto que tiene

5

NUMEROS NATURALES Y NUMEROS CARDINALES

GIUSEPPE PEANO
(1.858-1.932)

5.1 LOS NUMEROS NATURALES Y EL PRINCIPIO DE INDUCCION MATEMATICA

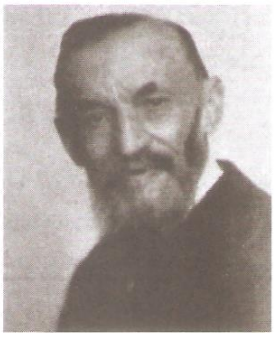
5.2 NUMEROS CARDINALES

5.3 PRINCIPIO DE INCLUSION-EXCLUCION

5.4 PRINCIPIOS BASICOS DE CONTEO

5.5 PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

BREVE HISTORIA DE LOS SISTEMAS NUMERICOS



GIUSEPPE PEANO
(1.858-1.932)

GIUSEPPE PEANO *nació en Cuneo, Italia en agosto de 1.858. En 1.876 entró a la Universidad de Turín como estudiante y en 1.884, como profesor de cálculo infinitesimal. Esta universidad se convirtió en su centro de trabajo e investigación de toda su vida. Su interés se desarrolló, principalmente, alrededor de la lógica simbólica y de los fundamentos de la matemática. Sus resultados en lógica influyeron, en decisiva, en la concepción de la histórica obra* ***Principia Mathematica*** *de B. Russell y A Whitehead. Entre 1.894 y 1.908, Peano publicó su* ***Formulario Matemático****, cuyo propósito fue presentar la totalidad de la matemática deducida a partir de unos pocos postulados y usando la notación lógica que él había inventado. El proyecto fue demasiado ambicioso para ser llevado a cabo por un solo hombre. Este quedó inconcluso; sin embargo, sirvió de inspiración a* ***Nicolás Bourbaki****, quien en 1.939, inició la publicación de una serie de fascículos con nombre de* ***Elements de Mathematique****. El objetivo de la obra es presentar toda la matemática contemporánea con rigor y originalidad. La tarea todavía continua y ya tiene publicados más de 30 fascículos, que suman un total de más de 5.000 páginas. Lo curioso de esta historia es que tal brillante matemático no existe. Nicolás Bourbaki es, simplemente, el seudónimo de una asociación, creada a fines de los años 30, por un grupo de jóvenes (para ese entonces) matemáticos mayormente franceses, relacionados con la Escuela Normal de París. Aquellos fundadores ya han ganado su posición en el mundo científico. Entre ellos tenemos a* ***Henri Cartán, Jean Diudonné, Claude Chevalley, André Weil, Charles Ehresman, Samuel Eilemberg*** *(americano).*

ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

Peano nace (agosto,1.858) cuando gobernaba Venezuela el General Julián Castro. Unos meses antes, José Tadeo Monagas, derrotado por la llamada Revolución de Marzo, tuvo que entregar la presidencia. Peano muere el 20 de abril de 1.932. En esa época el mundo sufría los estragos de la ***Gran Depresión*** *(1.929-1.939), la más larga y severa crisis económica en la historia de la humanidad. Esta se inició con la caída de la Bolsa de Nueva York, en octubre de 1.929.*

n 1.876 entró a la
fesor de cálculo
e investigación de
lor de la lógica
tados en lógica
obra ***Principia***
Peano publicó su
de la matemática
gica que él había
cabo por un solo
ación a ***Nicolás***
e fascículos con
presentar toda la
ía continua y ya
e 5.000 páginas.
existe. Nicolás
la a fines de los
cos mayormente
s fundadores ya
a ***Henri Cartán,***
esman, Samuel

NTES

l Julián Castro.
Revolución de
ril de 1.932. En
-1.939), la más
se inició con la

SECCION 5.1
LOS NUMEROS NATURALES Y EL PRINCIPIO DE INDUCCION MATEMATICA

Un papel primordial desempeña, tanto en la matemática como en los diferentes aspectos de la vida cotidiana, la **sucesión de los números naturales:**

$$\mathbf{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots}$$

Estos números forman el conjunto de los números naturales. Esto es,

$$\mathbb{N} = \{\, \mathbf{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots} \,\}$$

Al sistema de los números naturales; es decir, el conjunto $\mathbb{N}$, provisto de las operaciones de adición y multiplicación, lo conocemos desde la escuela primaria. Aprovecharemos esta situación y aquí sólo nos detendremos a analizar algunos aspectos novedosos. Sin embargo, es importante hacer resaltar que este sistema fue construido formalmente por **Giuseppe Peano** en 1.889 a partir de dos conceptos primitivos (sin definir), **número natural** y **sucesor**; y de 5 axiomas (o postulados), que ahora se les conoce con el nombre de **Axiomas de Peano**.

AXIOMAS DE PEANO

Examinemos con más detalle la sucesión de números naturales. Vemos que todo número tiene uno y sólo un sucesor. Todo número natural, excepto 0, es sucesor de un único número natural. Todo el conjunto $\mathbb{N}$ se obtiene comenzando con 0 y tomado los sucesivos sucesores. Estos resultados fueron captados por Peano en sus axiomas, los que enunciamos a continuación. A estos axiomas los tomamos como tales; es decir, como proposiciones cuya veracidad la aceptamos sin el trámite de la demostración.

Para facilitar la presentación introducimos una notación para el concepto de sucesor. Escribiremos $s(n)$ para indicar el sucesor del número n. Esto es, $s(n) = n + 1$.

Axioma 1. $0 \in \mathbb{N}$.

Axioma 2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow s(n) \in \mathbb{N}$.

Axioma 3. $\forall n \in \mathbb{N},\ s(n) \neq 0$.

Axioma 4. $s(n) = s(m) \Rightarrow n = m$.

Axioma 5. Axioma de Inducción

Si un subconjunto M de $\mathbb{N}$ es tal que:

i. $0 \in M$ y **ii.** $k \in M \Rightarrow k+1 \in M,\ \forall\, k \geq 0$,

entonces $M = \mathbb{N}$

Los cuatro primeros axiomas son bastante claros, en cambio el 5 necesita más explicación. En palabras, este axioma nos asegura que cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ que contiene a 0 y que cada vez que contenga un número cualquiera, también contiene a su sucesor, este conjunto debe ser necesariamente todo $\mathbb{N}$. Michael Spivak, un conocido matemático estadounidense lo explica así: Imaginemos que tenemos una cola muy grande de personas a las que alineamos de acuerdo a los números naturales. Es decir, tenemos la persona 0, la persona 1, la persona 2, etc. Supongamos que existe un chisme. Se sabe que la persona 0 conoce el chisme. Además se acuerda que cualquier persona que conozca el chisme, tiene la obligación de contarlo al siguiente en la cola. De estos dos hechos podemos concluir que toda la gente que está en la cola se entera del chisme. En efecto, como la persona 0 conoce el chisme, ésta, por obligación, le contó a la persona 1. Esta, por obligación, le contó a la persona 2. Esta, a la persona 3. Y así sucesivamente hasta agotar la cola.

PRINCIPIO DE INDUCCION MATEMÁTICA

El quinto axioma de Peano (axioma de la inducción) nos proporciona un método simple y muy útil para probar proposiciones relacionadas con los números naturales. Este es el método de ***inducción matemática, principio de inducción matemática*** o simplemente, ***prueba por inducción.***

Para ilustrar este método consideremos la sucesión de los números naturales impares:

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n-1, 2n+1, \ldots$$

Calculando las sumas parciales de los términos de esta sucesión nos encontramos con los siguientes resultados:

$$P(1):\ 1 = 1^2 \qquad P(2):\ 1+3 = 2^2$$
$$P(3):\ 1+3+5 = 3^2 \qquad P(4):\ 1+3+5+7 = 4^2$$

Estos resultados nos llevan inmediatamente a conjeturar que la siguiente proposición general:

$$P(n):\ 1+3+5+7+\ldots+2n-1 = n^2, \qquad \forall\, n \geq 1$$

Es decir, la suma de los n primeros números naturales impares es igual a n^2, siendo n cualquier número natural.

El siguiente teorema nos proporciona una técnica para probar la veracidad de la conjetura anterior. El teorema tiene su basamento en el quinto axioma de Peano.

TEOREMA 5.1 **Prueba de inducción**

Sea b un número natural fijo y $P(n)$ una proposición abierta asociada al número natural n. Si

1. $P(b)$ es verdadera
2. $P(k) \Rightarrow P(k+1),\ \forall\, k \geq b,$

entonces, $P(n)$ es verdadera, $\forall n \geq b$.

Demostración

Ver el problema resuelto 2.

OBSERVACION.

El teorema anterior nos dice que para probar por inducción que la proposición $P(n)$, $\forall n \geq b$, es verdadera, se debe cumplir con los tres pasos siguientes:

1. **Paso Básico.** Verificar que $P(b)$ es verdadera.
2. **Paso Inductivo.** Suponer que $P(k)$ es verdadera, para $k \geq b$, y deducir de aquí que $P(k+1)$ es también verdadera.

   La suposición de que $P(k)$ es verdadera se llama **hipótesis inductiva**.
3. **Conclusión.** Debido a que se han cumplido las pasos 1 y 2, que son las hipótesis del teorema anterior, concluimos la tesis de dicho teorema:

$$P(n) \text{ es verdadera, } \forall n \geq b.$$

En la mayoría de los casos, el número b del paso básico es uno de los primeros números naturales: 0, 1 , 2, 3 ó 4.

EJEMPLO 1 Probar por inducción que

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \qquad \forall\, n \geq 1$$

Solución

Sea $P(n)$: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ y $b = 1$

1. **Paso Básico:**

   Para $n = b = 1$ se tiene que: $P(1)$: $2(1) - 1 = 1 = 1^2$

   Vemos que $P(1)$ es verdadero.

2. **Paso Inductivo:**

   Supongamos que, para $k \geq 1$, se cumple que (hipótesis inductiva)

   $P(k)$: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ es verdadera.

   Ahora,

$$\begin{aligned} P(k+1)\colon\ & 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) \\ &= [1 + 3 + 4 + \ldots + (2k - 1)] + (2k + 1) \\ &= k^2 + (2k + 1) \qquad \text{(Hipótesis inductiva)} \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

   Esto es,

   $P(k+1)$: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2(k+1) - 1 = (k+1)^2$ es verdadera.

3. Conclusión:

Habiéndose cumplido los pasos exigidos por el teorema anterior, podemos concluir que se cumple que:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2, \quad \forall\, n \geq 1.$$

EJEMPLO 2 Probar por inducción que

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Solución

Sea $P(n)$: $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$ y $b=1$

1. Paso Básico:

Para $n=b=1$ se tiene que $P(1)$: $\dfrac{1}{1(1+1)}=\dfrac{1}{1+1}$

Vemos que $P(1)$ es verdadera.

2. Paso Inductivo:

Supongamos que para $k \geq 1$ se cumple que

$$P(k)\text{: } \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

Ahora,

$$P(k+1)\text{: } \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \qquad \text{(Hipótesis inductiva)}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$

Esto es, se cumple que

$$P(k+1)\text{: } \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$

3. Conclusión:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

EJEMPLO 3 Probar por inducción la siguiente generalización de la propiedad distributiva de la intersección de conjuntos respecto a la unión.

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n), \ \forall\, n \geq 2.$$

Solución

1. **Paso Básico:**

   Para $b = 2$, por el teorema 4.8, sabemos que se cumple que

$$A \cap (B_1 \cup B_2) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$$

2. **Paso Inductivo:**

   Supongamos que, para $k \geq 2$, se cumple que

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)$$

   Ahora, aplicado la propiedad asociativa de la unión,

$$\begin{aligned} A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k \cup B_{k+1}) &= A \cap ([B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k] \cup B_{k+1}) \\ &= (A \cap [B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k]) \cup (A \cap B_{k+1}) && \text{(Teorema 4.8)} \\ &= [(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)] \cup (A \cap B_{k+1}) && \text{(Hip. inductiva)} \\ &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k) \cup (A \cap B_{k+1}) && \text{(Asociatividad)} \end{aligned}$$

3. **Conclusión:**

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n), \ \forall\, n \geq 2.$$

EJEMPLO 4 Probar por inducción que $n! \geq 2^{n-1}, \quad \forall\, n \geq 1.$

Solución

1. **Paso Básico:**

   Para $b = 1$,
   $1! = 1$ y $2^{1-1} = 2^0 = 1$. Por tanto, $1! \geq 2^{1-1}$

   Luego, la proposición es cierta para $b = 1$.

2. **Paso Inductivo:**

   Supongamos que se cumple que, para $k \geq 1$, se cumple que $k! \geq 2^{k-1}$

   Ahora,

$$\begin{aligned} (k+1)! = (k+1)k! &\geq (k+1)\, 2^{k-1} && \text{(Hipótesis inductiva)} \\ &\geq (1+1)\, 2^{k-1} && (k \geq 1) \\ &= 2.\, 2^{k-1} = 2^{k-1+1} = 2^{(k+1)-1} \end{aligned}$$

   Luego, $\quad (k+1)! \geq = 2^{(k+1)-1}$

3. Conclusión:

$n! \geq 2^{n-1}, \quad \forall\, n \geq 1.$

EJEMPLO 5 Probar por inducción que:

$$11^n - 6 \text{ es divisible entre 5}, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Solución

1. Paso Básico:

Para $b = 1$ tenemos que $11^1 - 6 = 5$, que es divisible entre 5.

Luego, la proposición es cierta para $b = 1$.

2. Paso Inductivo:

Supongamos que $\forall\, k \geq 1$se cumple que $11^k - 6$ es divisible entre 5. Es decir, existe un número natural m_1 tal que

$$11^k - 6 = 5m_1 \qquad \text{(a)}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
11^{k+1} - 6 &= 11 \times 11^k - (11 \times 6) + (11 \times 6) - 6 \quad \text{(Restamos y sumamos } 11\times 6\text{)} \\
&= (11 \times 11^k - 11 \times 6) + (11 \times 6 - 6) \\
&= 11(11^k - 6) + 60 \\
&= 11(5m_1) + 60 \qquad \text{por (a)} \\
&= 5(11m_1 + 12) \\
&= 5m, \quad \text{donde } m = 11m_1 + 12
\end{aligned}$$

Luego, $11^{k+1} - 6$ es divisible entre 5.

3. Conclusión:

$$11^n - 6 \text{ es divisible entre 5}, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

PROBLEMAS RESUELTOS 5.1

PROBLEMA 1 Probar por inducción que

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \forall\, n \geq 1$$

Solución

1. Paso Básico:

Para $n = b = 1$ es cierta, ya que: $-1^2 = (-1)^1 \dfrac{1(1+1)}{2}$

2. Paso Inductivo:

Supongamos que para un $k \geq 1$ se cumple que

$$-1^2 + 2^2 - \ldots + (-1)^k k^2 = (-1)^k \frac{k(k+1)}{2}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
&-1^2 + 2^2 - \ldots + (-1)^k k^2 + (-1)^{k+1}(k+1)^2 \\
&= [-1^2 + 2^2 - \ldots + (-1)^k k^2] + (-1)^{k+1}(k+1)^2 \\
&= (-1)^k \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^{k+1}(k+1)^2 \qquad \text{(Hipótesis inductiva)} \\
&= -(-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^{k+1}(k+1)^2 = (-1)^{k+1}\frac{-k(k+1)+2(k+1)^2}{2} \\
&= (-1)^{k+1}\frac{k^2+3k+2}{2} = (-1)^{k+1}\frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

3. Conclusión:

$$-1^2 + 2^2 - \ldots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}, \ \forall\, n \geq 1.$$

$\boxed{\textbf{PROBLEMA 2}}$ Probar el **teorema 5.1**: **Prueba por Inducción**.

Si

1. $P(b)$ es verdadera
2. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $\forall\ k \geq b$

Entonces $P(n)$ es verdadera, $\forall\, n \geq b$.

Solución

Usaremos el axioma de inducción de Peano.

Sea $Q(n) = P(n+b)$ y $M = \{\, n \in \mathbb{N} \,/\, Q(n) \text{ es verdadera} \,\}$

i. Se tiene que $0 \in M$, ya que, por 1, $Q(0) = P(0+b) = P(b)$ es verdadera.

ii. Por otro lado, supongamos que $k \in M$; esto es, $Q(k) = P(k+b)$ es verdadera. Pero, entonces por la hipótesis **2**, $P(k+b+1) = Q(k+1)$ es verdadera y, por lo tanto, $(k+1) \in M$.

Habiéndose cumplido las condiciones **i** e **ii** del axioma de inducción, se concluye que $M = \mathbb{N}$. Esto nos asegura que:

$$Q(n) = P(n+b) \text{ es verdadera, } \forall\, n \geq 0.$$

Pero, esto es lo mismo que afirmar que

$$P(n) \text{ es verdadera, } \forall\, n \geq b.$$

PROBLEMA 3 **Principio de Buena Ordenación de los naturales.**

Probar que el conjunto $\mathbb{N}$ de los **números naturales es bien ordenado.** Es decir, todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo (un elemento en el conjunto que es menor que todos los otros elementos del conjunto).

Solución

Procedemos por reducción al absurdo y, en este proceso, usamos el axioma de inducción para llegar a una contradicción.

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$. Es decir, $S \subset \mathbb{N}$ y $S \neq \varnothing$.

Supongamos que S no tiene un elemento mínimo. Sea $M = \mathbb{N} - S$.

i. Como 0 es el mínimo de $\mathbb{N}$ y S no tiene mínimo, entonces $0 \notin S$. Luego, $0 \in M$.

ii. Supongamos que $k \in M$, donde $k \geq 0$. En este caso, ningún número menor que k está en S, ya que de ser así, alguno de ellos sería un mínimo de S. Ahora, como $0, 1, 2, \ldots$ y k no están en S, entonces $k+1$ tampoco está es S, ya que, de estarlo, $k+1$ sería el mínimo de S. Por tanto, $k+1$ está en M.

Habiéndose cumplido las dos requisitos del axioma de inducción, este nos permite asegurar que $M = \mathbb{N}$. Por tanto $S = \varnothing$. ¡contradicción!. Debemos admitir, entonces, que S tiene mínimo.

PROBLEMAS PROPUESTOS 5.1

Probar por inducción:

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}, \ \forall\, n \geq 1.$

2. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}, \ \forall\, n \geq 1.$

3. $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + n(n!) = (n+1)! - 1, \quad \forall\, n \geq 1.$

4. $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}, \ \forall\, n \geq 1.$

5. $\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{5.7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}, \quad \forall\, n \geq 1.$

6. $\dfrac{1}{1.4} + \dfrac{1}{4.7} + \dfrac{1}{7.10} + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}, \quad \forall\, n \geq 1.$

7. $\dfrac{1}{2.4} + \dfrac{1.3}{2.4.6} + \dfrac{1.3.5}{2.4.6.8} + \ldots + \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6.\ \ldots\ .(2n+2)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6.\ \ldots\ .(2n+2)}, \forall\, n \geq 1.$

8. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \forall\, n \geq 1.$

8. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}, \qquad \forall\, n \geq 1.$

9. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 \ldots + n)^2, \quad \forall\, n \geq 1.$

10. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}, \quad \forall\, n \geq 1.$

11. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n-1)^2, \quad \forall\, n \geq 1$

12. $1(2) + 2(2^2) + 3(2^3) + \ldots + n(2^n) = 2 + (n-1)2^{n+1}, \quad \forall\, n \geq 1.$

13. $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2.$

14. $4^n - 1$ es divisible entre 3, $\forall\, n \geq 1$.

15. $7^n - 1$ es divisible entre 6, $\forall\, n \geq 1$.

16. $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} = \dfrac{a^n - 1}{a - 1}, a \neq 1, \forall\, n \geq 1.$

17. $a + ar^1 + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a - ar^n}{1 - r}, r \neq 1, \forall\, n \geq 1.$

18. $2n + 1 \leq 2^n, \forall\, n \geq 3.$

19. $1 + 2 + 3 + \ldots + n < \dfrac{(2n+1)^2}{8}, \ \forall\, n \geq 1$

20. $n^2 \leq 2^n, \quad \forall\, n \geq 4.$

21. $(n+1)! > 2^{n+3}, \quad \forall\, n \geq 5.$

22. $4^{n+4} > (n+4)^4, \quad \forall\, n \geq 1.$

23. $(1+x)^n \geq 1 + nx$, donde $x \geq -1$, $\forall\, n \geq 1$.

24. $\forall\, n \geq 3$, la suma de la medida de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es $180^\circ(n-2)$

25. Si $p, q_1, q_2, \ldots, q_n$ son proposiciones, entonces

a. $p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_n) \equiv (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \ldots \vee (p \wedge q_n), \quad \forall\, n \geq 2$

b. $p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n) \equiv (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \ldots \wedge (p \vee q_n), \quad \forall\, n \geq 2$

c. $\sim(q_1 \vee q_2 \vee q_3 \vee \ldots \vee q_n) \equiv \sim q_1 \wedge \sim q_2 \wedge \sim q_3 \wedge \ldots \wedge \sim q_n, \quad \forall\, n \geq 2.$

d. $\sim(q_1 \wedge q_2 \wedge q_3 \wedge \ldots \wedge q_n) \equiv \sim q_1 \vee \sim q_2 \vee \sim q_3 \vee \ldots \vee \sim q_n, \quad \forall\, n \geq 2$

SECCION 5.2
NUMEROS CARDINALES

En esta sección estamos interesados en medir el "tamaño" de los conjuntos; es decir, en el "número de elementos" que tiene cada conjunto. Los objetos que nos servirán para hacer este tipo de medición son los llamados números cardinales.

¿Cómo podríamos determinar que dos conjuntos tienen el mismo número de elementos? Alguien podría sugerir que se cuente los elementos de cada conjunto y comparar los resultados. Esto funcionaría siempre que los conjuntos sean finitos, pero estaríamos en dificultades si estos conjuntos son infinitos. Para salvarnos de este aprieto contamos con la idea simple, pero profunda, de correspondencia biunívoca.

DEFINICION Diremos que el conjunto A **es equipotente con el conjunto** B, o que A **tiene igual número de elementos que** B, y escribiremos

$$A \cong B,$$

si existe una correspondencia biunívoca de A en B.

EJEMPLO 1 El conjunto $A = \{a, b, c\}$ es equipotente con el conjunto $B = \{1, 2, 3\}$.

En efecto, tenemos la siguiente correspondencia biunívoca de A en B:

$$\begin{array}{rcccc} A = \{ & a & b & c & \} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ B = \{ & 1 & 2 & 3 & \} \end{array}$$

EJEMPLO 2 El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es equipotente con el conjunto $P = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ de los números naturales pares.

En efecto, tenemos la siguiente correspondencia biunívoca de $\mathbb{N}$ en P:

$$\begin{array}{rccccccccc} \mathbb{N} = \{ & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & \ldots & \} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ P = \{ & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots & 2n & \ldots & \} \end{array}$$

Este resultado debe causar sorpresa a muchos lectores, porque P es un subconjunto propio de $\mathbb{N}$ y sin embargo estos tienen igual número de elementos (no siempre el todo es mayor que la parte).

Hasta ahora hemos estado hablando de conjuntos finitos e infinitos sin haberlos definido. Remediemos esta situación.

DEFINICION Un **conjunto** A es **finito** si A es vacío o si A es equipotente con algún conjunto de números naturales de la forma $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Un **conjunto** es **infinito** si éste no es finito.

EJEMPLO 3 El conjunto $A = \{a, b, c\}$, dado en el ejemplo 1, es finito. En cambio, el conjunto $\mathbb{N}$ y el conjunto P de los naturales pares son infinitos.

Ahora entremos al tema de los números cardinales.

DEFINICION Sea A un conjunto finito. Diremos que:

a. **El número cardinal de** A es **0** si $A = \varnothing$.

b. **El número cardinal** de A es n si A es equipotente con el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Escribiremos $\#A$ para indicar el número cardinal del conjunto A.

EJEMPLO 4 Si $A = \{ a, b, c, d\}$, entonces $\#A = 4$, ya que A es equipotente con el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

DEFINICION Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ dos números cardinales y sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos conjuntos disjuntos tales que $\#\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}$ y $\#\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b}$. Entonces

1. La **suma de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$** es el cardinal $\boldsymbol{a + b = \#(A \cup B)}$.
2. El **producto de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$** es el cardinal $\boldsymbol{ab = \#(A \times B)}$.

CARDINALES TRANSFINITOS

La definición anterior dice que los números cardinales de los conjuntos finitos, a los que llamaremos **cardinales finitos**, no son otra cosa que los números naturales. Sin embargo, la teoría de los números cardinales rebasa a la de los naturales, ya que se puede definir los números cardinales de conjuntos infinitos. Estos son los cardinales **transfinitos**, que no son números naturales.

El primer cardinal transfinito que se encuentra es el cardinal del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, al cual Cantor lo denotó con el símbolo $\aleph_0$, que se lee **aleph-subcero** (aleph es la primera letra del alfabeto hebreo). O sea

$$\#\mathbb{N} = \aleph_0$$

Más adelante, en el teorema 7.7, probaremos que $\mathbb{Z}$, el conjunto de números enteros, es equipotente con $\mathbb{N}$. También se puede probar que $\mathbb{Q}$ es equipotente con $\mathbb{N}$. Esto es, tenemos el siguiente sorprendente resultado:

$$\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N} = \aleph_0$$

Este nos dice que existen tantos números racionales o tantos números enteros como números naturales.

La siguiente interrogante que surge es sobre el cardinal del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Se prueba que:

$$\aleph_0 = \#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$$

En este punto nos encontramos con uno de los problemas más famosos de la matemática. ¿Existe un número cardinal x tal que

$$\aleph_0 < x < \#\mathbb{R}?$$

Cantor lanzó la conjetura de que **no existe** tal cardinal. Esta conjetura se conoce con el nombre de **hipótesis del continuo**. Este problema desafió a los matemáticos y lógicos por muchos años. En 1.963, **Paul J. Cohen**, de la Universidad de Stanford,

probó que tal hipótesis no puede ser demostrada en base a los axiomas de la teoría de conjuntos. Es decir, la hipótesis del continuo es independiente de los postulados de la teoría de conjuntos y, por tanto, no puede ser deducida a partir de estos. La situación es análoga al postulado de las paralelas de la Geometría Euclidiana.

Cabe preguntar si existen otros cardinales transfinitos además de los dos ya dados. La respuesta es que **existen infinitos cardinales transfinitos**. En efecto, Cantor probó el siguiente resultado, que ahora se llama teorema de Cantor.

Teorema de Cantor. Para cualquier conjunto A se cumple

$$\#A < \#\wp(A) = 2^{\#A}$$

Este resultado construimos la siguiente cadena de cardinales transfinitos

$$\aleph_0 = \#\mathbb{N} < \#\wp(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0} = \aleph_1 < \#\wp(\wp(\mathbb{N})) = \aleph_2 = 2^{\aleph_1} < \#\wp(\wp(\wp(\mathbb{N}))) < \ldots$$

Con esta notación, la **hipótesis del continua** afirma que:

$$\#\mathbb{R} = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$

¿SABIAS QUE . . .

PAUL JOSEH COHEN (1.934–2.007) *nació en Nueva Jersey, Estados Unidos, hijo de padres emigrantes. Obtuvo su doctorado (Ph. D) en la Universidad de Chicago el año 1.958. Fue profesor del Instituto Tecnológico de Massachussets, Universidad de Rochester y de la Universidad de Stanford.*

En 1.966, por su trabajo en la Hipótesis del Continuo, ganó la ***Medalla Field****, que en mundo matemático equivale al premio Nóbel.*

P. J. Cohen

PROBLEMAS PROPUESTOS 5.2

1. Si a, b y c son números cardinales, usando la definición de suma de cardinales, probar que:

i. $a + 0 = a$ **ii.** $a + b = b + a$ **iii.** $a + (b + c) = (a + b) + c$

2. Si a, b y c son números cardinales, usando esta definición de producto de cardinales, probar que:

i. $a.0 = 0$ **ii.** $1.a = a$ **iii.** $ab = ba$

iv. $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $b = 0$ **v.** $a(b + c) = ab + ac$

3. Si $\#\wp(A) = 8$ y $\#\wp(B) = 4$, hallar

a. $\#(A \times B)$ **b.** $\#\wp(\wp(A) \times \wp(B))$

SECCION 5.3
PRINCIPIO DE UNION-EXCLUSION

Las técnicas de conteo son importantes tanto en la matemática como en otras disciplinas. Así, en la ciencia de la computación, desempeñas un papel fundamental en el análisis de algoritmos. En esta sección y en las dos siguientes, presentamos algunas de estas técnicas. Todos los conjuntos que aquí aparezcan, a menos que digamos lo contrario, son finitos.

TEOREMA 5.2 Si A y B son dos conjuntos finitos, entonces

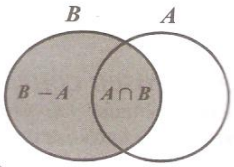
$$\#(B-A) = \#B - \#(A \cap B)$$

Demostración

Tenemos que

$$B = (B-A) \cup (A \cap B),$$

donde los conjuntos $B-A$ y $A \cap B$ son disjuntos.



Luego, de acuerdo a la definición de suma de cardinales,

$$\#B = \#(B-A) + \#(A \cap B) \Rightarrow \#(B-A) = \#B - \#(A \cap B)$$

TEOREMA 5.3 **Principio de inclusión-exclusión.**

Si A y B son dos conjuntos finitos, entonces

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Demostración

Tenemos que $A \cup B = A \cup (B-A)$, donde los conjuntos A y $B-A$ son disjuntos. Luego,

$$\#(A \cup B) = \#A + \#(B-A)$$

Reemplazando en esta igualdad la de la del teorema anterior obtenemos

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

EJEMPLO 5 Si $\#A = 15, \#B = 10$ y $\#(A \cap B) = 4$, hallar $\#(A \cup B)$

Solución

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) = 15 + 10 - 4 = 21$$

EJEMPLO 6 En una sección de 70 estudiantes, 40 de ellos toman el curso de Algebra, 35 toman el curso de Cálculo y 15 toman ambos cursos.

a. ¿Cuántos estudiantes toman, por lo menos, uno de los cursos?

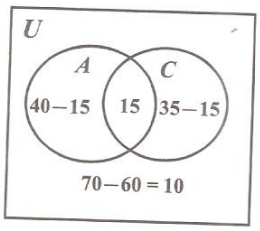
b. ¿Cuántos estudiantes toman Algebra y no toman Cálculo?

c. ¿Cuántos estudiantes toman Cálculo y no toman Algebra?

d. ¿Cuántos estudiantes no toman ninguno de los dos cursos?

Solución

Sea U el conjunto formado por todos los estudiantes de la sección dada. Sea A el conjunto de estudiantes de la sección que toman álgebra y sea C el conjunto de estudiantes de la sección que toman cálculo.



Tenemos que $\#U = 70$, $\#A = 40$, $\#C = 35$ y $\#(A \cap C) = 15$

a. El número de estudiantes que toman por lo menos uno de los dos cursos es

$$\#(A \cup C) = \#A + \#C - \#(A \cap C) = 40 + 35 - 15 = 60$$

a. El número de estudiantes que toman Algebra, y no toman cálculo es

$$\#A - \#(A \cap C) = 40 - 15 = 25$$

c. El número de estudiantes que toman cálculo y no toman álgebra es:

$$\#C - \#(A \cap C) = 35 - 15 = 20$$

d. El número de estudiantes que no toman ni Algebra ni Cálculo es

$$\#U - \#(A \cup C) = 70 - 60 = 10$$

PROBLEMAS RESUELTOS 5.3

PROBLEMA 1 Si A, B y C son tres conjuntos finitos, probar que

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

Solución

$$\#(A \cup B \cup C) = \#([A \cup B] \cup C) = \#(A \cup B) + \#C - \#([A \cup B] \cap C)$$
$$= \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#C - \#([A \cap C] \cup [B \cap C])$$
$$= \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#C - \{\#[A \cap C] + \#[B \cap C] - \#(A \cap C \cap B \cap C)\}$$
$$= \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

PROBLEMA 2 Para averiguar las preferencias sobre las marcas de cerveza se hizo una encuesta a 650 personas, con los siguientes resultados:

393 consumen cerveza Polar, 233 consumen Polar y Brahma.
390 " " Brama, 226 " Polar y Regional.
349 " " Regional, 150 " las tres cervezas.
212 " " Brahma y Regional.

a. ¿Cuántas personas consumen Brahma, pero no Polar?

b. ¿Cuántas personas consumen Brahma, pero no Regional?

c. ¿Cuántas personas consumen Polar o Regional, pero no Brahma?

d. ¿Cuántas personas consumen sólo Polar?

e. ¿Cuántas personas consumen al menos una de ls tres cervezas?

f. ¿Cuántas personas no consumen ninguna de las tres cervezas?

Solución

Sean P, B, y R los conjuntos de las personas que consumen Polar, Brahma y Regional, respectivamente.

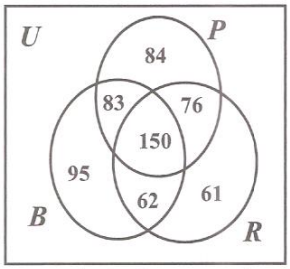
Como 212 personas consumen cerveza Brahma y Regional y 150 consumen las tres cervezas, entonces 212 – 150 = 62 sólo consumen Brahma y Regional (no consumen Polar).

En forma similar se obtiene que 83 personas sólo consumen Polar y Brahma, y que 76 personas sólo consumen Polar y Regional.

Como 393 consumen Polar, entonces 393 – (83+76+150) = 84 personas sólo consumen Polar.

En forma similar se obtiene que 95 personas sólo consumen Brama, y que 61 personas sólo consumen Regional.

Con estos datos construimos el siguiente diagrama.



Ahora, ya estamos listos para contestar las preguntas. El diagrama nos da la información buscada.

a. Número de personas que consumen Brahma, pero no Polar: $95 + 62 = 157$.

b. Número de personas que consumen Brahma, pero no Regional: $95 + 83 = 178$.

c. Número de personas que consumen Polar o Regional, pero no Brahma:

$$84 + 76 + 61 = 221.$$

d. Número de personas que sólo consumen Polar: 84.

e. Número de personas que consumen al menos una de las tres cervezas:

$$84 + 83 + 76 + 150 + 95 + 62 + 61 = 611.$$

Este resultado también puede obtenerse usando el problema anterior.

f. Número de personas que no consumen ninguna de las tres cervezas:

$$650 - 611 = 39.$$

PROBLEMA 3 De un grupo de 200 turistas que llegaron a Venezuela se saben los siguientes datos:

70	turistas	visitaron	Canaima
140	"	"	Zulia
158	"	"	Mérida
50	"	"	Canaima y Zulia
120	"	"	Zulia y Mérida
55	"	"	Canaima y Mérida
15	"	"	Zulia, pero no Canaima ni Mérida.

a. ¿Cuántos turistas visitaron los tres lugares señalados?

b. ¿Cuántas turistas visitaron sólo Mérida?

c. ¿Cuántos turistas no visitaron ninguno de los tres lugares?

Solución

Sean C, Z y M los conjuntos de turistas que visitaron Canaima, Zulia y Mérida, respectivamente

a. Del conjunto que más información tenemos es Z, del cual conocemos que

$$\#Z = 140 \quad \text{y} \quad \#(Z \cap \complement C \cap \complement M) = 15.$$

Tratemos de encontrar el cardinal de todos los subconjuntos de Z. Para esto, designamos con x el cardinal de la intersección de los tres conjuntos. Esto es,

$$\#(C \cap Z \cap M) = x$$

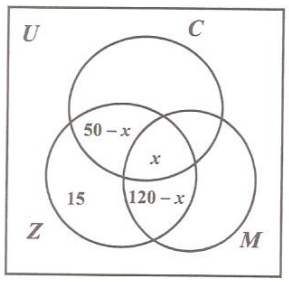
Como 50 turistas visitaron Canaima y Zulia, entonces $50 - x$ visitaron sólo Canaima (no visitaron Mérida). Esto es,

$$\#(C \cap Z \cap \complement M) = 50 - x$$

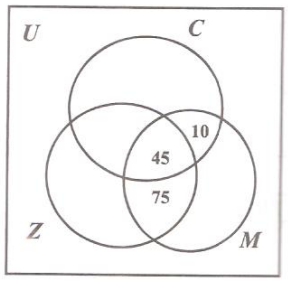
Por otro lado, como 120 turistas visitaron Zulia y Mérida, entonces $120 - x$ visitaron sólo Zulia y Mérida (no visitaron Canaima).Esto es,

$$\#(Z \cap M \cap \complement C) = 120 - x$$

Con estos datos construimos el diagrama I.



I



II

Ahora, mirando el diagrama I, tenemos que

$$\#Z = 15 + (50 - x) + x + (120 - x)$$

Pero, como $\#Z = 140$, tenemos que

$$140 = 15 + (50 - x) + x + (120 - x)$$

De esta ecuación obtenemos que $x = 45$.

En consecuencia, 45 turistas visitaron los tres lugares.

b. Pasamos al segundo diagrama, en el cual consignamos el resultado

$$x = 45 \quad \text{y} \quad 120 - x = 120 - 45 = 75.$$

Como 55 turistas visitaron Canaima y Mérida, entonces $55 - 45 = 10$ visitaron sólo Canaima y Mérida (no visitaron Zulia).

Si m es el número de turistas que sólo visitaron Mérida, entonces

$$\#M = m + 75 + 45 + 10$$

Pero, como $\#M = 158$, entonces

$$158 = m + 75 + 45 + 10,$$

de donde obtenemos que $m = 28$. En consecuencia, 28 turistas visitaron sólo Mérida.

c. El número de turistas que no visitaron ninguno de los tres lugares es

$$\#U - \#(C \cup Z \cup M) = 200 - \#(C \cup Z \cup M)$$

$$= 200 - [\#C + \#Z + \#M - \#(C \cap Z) - \#(C \cap M) - \#(Z \cap M) + \#(C \cap Z \cap M)]$$

$$= 200 - [70 + 140 + 158 - 50 - 55 + 120 + 45]$$

$$= 200 - 188 = 12.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 5.3

1. De un grupo de 130 personas, 80 trabajan, 60 estudian y 25 trabajan y estudian.

a. ¿Cuántas personas trabajan y no estudian?

b. ¿Cuántas personas estudian y no trabajan?

c. ¿Cuántas personas ni trabajan ni estudian?

2. En un club deportivo se practica fútbol, béisbol y natación. Se sabe que el 54% de socios practica fútbol, el 45% practica béisbol, el 40% practica natación, el 17% practica fútbol y béisbol, el 14% practica fútbol y natación y el 13% practica béisbol y natación.

a. ¿Qué porcentaje practica los tres deportes?

b. ¿Qué porcentaje practica sólo fútbol?

c. ¿Qué porcentaje practica sólo béisbol y natación?

3. Se tiene 32 libros que tratan los temas A, B y C. Se sabe que:

16 libros tratan el tema B

15 " " " " C

8 " " solamente el tema B

4 " " " " " C

2 " " " los temas A y B

5 " " " " " A y C

6 " " " " " B y C

a. ¿Cuántos libros tratan los tres temas a la vez?

b. ¿Cuántos libros tratan solamente el tema A?

4. Se conocen los siguientes datos sobre el rendimiento académico de 340 estudiantes de Ciencias del primer semestre:

214 estudiantes desaprueban Cálculo

206 " " Estructuras

190 " " Computación

130 " " Cálculo y Estructuras

120 " " Cálculo y Computación

110 " " Estructuras y Computación

70 " " Cálculo, Estructuras y Computación.

a. ¿Cuántos estudiantes desaprueban al menos una de las tres materias?

b. ¿Cuántos estudiantes no desaprueban ninguna de las tres materias?

c. ¿Cuántos estudiantes sólo desaprueban Cálculo y Estructuras?

d. ¿Cuántos estudiantes desaprueban sólo Cálculo?

5. De un grupo de 125 turistas venezolanos se conocen los siguientes datos:

62 turistas han visitado Alemania

67 " " " Francia

52 " " " España

31 " " " Alemania y Francia

30 " " " Alemania y España

24 " " " Francia y España

16 " " " Solamente España.

a. ¿Cuántos turistas visitaron los tres países?

b. ¿Cuántos turistas visitaron únicamente Alemania?

c. ¿Cuántos turistas visitaron al menos uno de los tres países?

d. ¿Cuántos turistas no visitaron ninguno de los tres países?

6. En una encuesta llevada en Barquisimeto sobre preferencias de periódicos se obtuvieron los siguientes resultados. De 100 personas encuestadas,

78 leen el Impulso.

74 leen el Nacional.

53 leen el Universal.

57 leen el Impulso y el Nacional.

46 leen el Impulso y el Universal.

31 leen el Impulso el Nacional y el Universal.

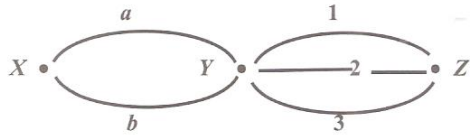
Si todos los encuestados leen al menos uno de los periódicos, ¿cuántos leen el Nacional y el Universal?

SECCION 5.4

PRINCIPIOS BASICOS DE CONTEO

En primer lugar, vamos a dar ciertas interpretaciones prácticas a las definiciones de producto y de suma de cardinales, las que nos permitirán lograr otros resultados importantes. Estas interpretaciones las llamaremos regla del producto y regla de la suma, respectivamente.

Comenzamos con un ejemplo. Se tienen tres ciudades: X, Y y Z . Existen 2 carreteras que conectan X con Y y existen 3 que conectan Y con Z. ¿Cuántas rutas diferentes se pueden tomar para viajar de X a Z?



Si tomamos la carretera ***a*** para llegar a Y; de allí, para ir a Z, tenemos 3 alternativas: las carreteras 1, 2, ó 3. Si tomamos la carretera ***b*** para llegar a Y, para ir de Y a Z también tenemos las mismas 3 alternativas. Por tanto, en total tenemos $3 + 3 = 6$ rutas distintas para viajar de X a Z. Estas 6 rutas se obtienen, más fácilmente, multiplicando las 2 posibilidades que hay de viajar de X a Y por las 3 posibilidades que hay de Y a Z; es decir, $2 \times 3 = 6$.

Otra manera de lograr el resultado anterior es como sigue. Se identifica cada ruta mediante un par ordenado, donde la primera componente es la alternativa de viajar de X a Y y la segunda componente es la alternativa de viajar de Y a Z. Esto es,

$$(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2) \text{ y } (b, 3).$$

Sea $A = \{ a, b \}$ el conjunto de las alternativas de viajar de X a Y y $B = \{ 1, 2, 3 \}$ el conjunto de las alternativas de viajar de Y a Z. Los pares ordenados anteriores no son otros que los elementos del producto cartesiano $A \times B$. Es decir,

$$A \times B = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$$

Por definición de producto de cardinales, $\#(A \times B) = \#(A) \times \#(B) = 2 \times 3 = 6$.

Este ejemplo nos ayuda a entender la regla del producto que, en su forma más simple, se expresa así:

Si una actividad puede realizarse en 2 pasos sucesivos, el paso 1 se puede hacer de n formas y el paso 2 de m formas, entonces el número de actividades posibles es

$$n \times m.$$

Esta proposición, para el caso de más de dos pasos, dice lo siguiente:

REGLA DEL PRODUCTO.

Supongamos que una actividad puede realizarse en k pasos sucesivos y el paso 1 se puede hacer de n_1 formas, el paso 2 puede hacerse de n_2 formas, . . . , y el paso k puede hacerse de n_k formas. Si todos los resultados finales son distintos, entonces el número de actividades posibles es

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$$

Con mucha frecuencia, de aquí en adelante, aparecerá el concepto de factorial, $n!$ de un numero natural n. Recordemos que:

$$0! = 1 \quad \text{y} \quad n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \times \ldots \times 2 \times 1, \text{ para } n \geq 1$$

EJEMPLO 1 Una estudiante tiene 7 blusas y 5 faldas. ¿De cuántas maneras diferentes puede vestirse?

Solución

La actividad se hace en dos pasos. En el paso 1 selecciona una blusa y tiene 7 formas de hacerlo. En el paso 2 selecciona una falda y tiene 5 formas de hacerlo. Por lo tanto, por la regla del producto, la estudiante tiene $7 \times 5 = 35$ diferentes maneras de vestirse.

EJEMPLO 2 Un **byte** es una cadena de 8 bit, o sea, un vector binario de 8 entradas.

a. ¿Cuántos bytes existen?

b. ¿Cuántos bytes comienzan con 000?

c. ¿Cuántos bytes no comienzan con 000?

Solución

a. Un byte, o sea una cadena de 8 bits se construye en 8 pasos sucesivos: Se selecciona el primer bit, se selecciona el segundo bit, . . . y se selecciona el octavo bit. A continuación tenemos un ejemplo de un byte.

0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**

Como cada paso tiene 2 formas de seleccionar (0 ó 1), entonces el número total de cadenas de 8 bits es:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$$

b. Un byte que comienza con 000 se construye en 5 pasos: Se selecciona el cuarto bit, se selecciona el quinto bit, se selecciona el sexto bit, se selecciona el séptimo bit y se selecciona el octavo bit. Como cada paso tiene 2 formas de seleccionar (0 ó 1), entonces el número total de bytes que comienzan con 000 es:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32.$$

c. El número de bytes que no comienzan con 000 es igual al número total de bytes menos el número de bytes que comienzan con 000. Por la parte **a**, el primer número es 256. Por la parte **b**, el segundo número es 32. Luego, el número de bytes que no comienzan con 000 es

$$256 - 32 = 224$$

EJEMPLO 3 **a.** ¿Cuántos bytes (cadenas de 8 bits) tienen su cuarto bit igual 1?

b. ¿Cuántos bytes comienzan con 000 y su cuarto bit es 1?

c. ¿Cuántas bytes no comienzan con 000 y su cuarto bit es 1?

Solución

a. Un byte con su cuarto bit igual a 1 se construye en 7 pasos: Se selecciona el primero, el segundo, el tercero, el quinto, el sexto, el séptimo y el octavo bit. Por tanto, el número de bytes cuyo cuarto bit igual a 1 es

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128$$

b. Un byte que comienza con 000 y que tenga su cuarto bit igual a 1 se construye en 4 pasos: Se selecciona el quinto bit, se selecciona el sexto bit, se selecciona el sétimo bit y se selecciona el octavo bit. Luego, el número de bytes que comienzan con 000 y tienen a 1 como cuarto bit es

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$$

c. El número de bytes que no comienzan con 000 y que tenga su cuarto bit igual a 1 es igual al número total de bytes que tienen su cuarto bit igual a 1 menos el número de bytes que comienzan con 000 y tienen su cuarto bit igual a 1. Por la parte **a**, el primer número es 128. Por la parte **b**, el segundo número es 16. Luego, el número de bytes que no comienzan con 000 y tienen su cuarto bit igual a 1 es

$$128 - 16 = 112$$

Ahora, a la definición de suma de cardinales la generalizamos y obtenemos la regla de la suma.

REGLA DE LA SUMA.

Sea $\{ X_1, X_2, \ldots, X_k \}$ una familia de conjuntos disjuntos por pares. Si X_1 tiene n_1 objetos, X_2 tiene n_2 objetos, . . . y X_k tiene n_k objetos, entonces el número de maneras que se pueden seleccionar un objeto de X_1 ó X_2 ó . . . ó X_k es

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

EJEMPLO 4 ¿Cuántos bytes comienzan con 000 ó con 111?

Solución

De acuerdo al ejemplo 2 parte **a**, existen 32 bytes que comienzan con 000. En forma enteramente similar a la parte **a** mencionada se obtiene que existen también 32 bytes que comienzan con 111. Como el conjunto de cadenas que comienzan con 000 es disjunto con el conjunto de cadenas que comienzan con 111, por la regla de la suma, el número de cadenas de bytes que comienzan con 000 ó 111 es

$$32 + 32 = 64.$$

EJEMPLO 5 En un estante hay 5 libros distintos escritos en Español, 6 libros distintos escritos en Francés y 8 libros distintos escritos en Alemán. ¿Cuántas maneras de seleccionar 2 libros escritos en idiomas diferentes existen?

Solución

Si se escoge un libro en Español y el otro en Francés, la regla del producto nos dice que existen $6 \times 5 = 30$ maneras de hacerlo. Si se escoge uno en Español y el otro en Alemán, por la misma razón, existen $6 \times 8 = 48$ maneras. Si se escoge uno en Francés y el otro en Alemán, existen $5 \times 8 = 40$ maneras. Por último, como estas tres formas de seleccionar son disjuntas, por la regla de la suma, obtenemos que el número de maneras de seleccionar dos libros escritos en idiomas diferentes es

$$30 + 48 + 40 = 118$$

EJEMPLO 6 ¿Cuántos bytes que comienzan con 000 ó tienen el cuarto bit igual a 1 existen?

Solución

Erróneamente podríamos proceder así: Por la parte **b** del ejemplo 2 sabemos que existen 32 bytes que comienzan con 000. Además, por la parte **a** del ejemplo 3 sabemos que existen 128 bytes que tienen su cuarto bit igual a 1. Sumando estos resultados, $32 + 128 = 160$, nos daría la respuesta. Este proceso es incorrecto, porque la regla de la suma exige que los conjuntos sean disjuntos, sin embargo, los 2 conjuntos considerados no lo son.

Resolvemos el problema creando una familia de conjuntos disjuntos por pares, como la que sigue. Sean

$$C_1 = \{\, x \,/\, x \text{ es un byte que comienza con 000 y cuarto bit es 1} \,\}$$

$$C_2 = \{\, x \,/\, x \text{ es un byte que comienza con 000 y cuarto bit es 0} \,\}$$

$$C_3 = \{\, x \,/\, x \text{ es un byte que no comienza con 000 y cuarto bit es 1} \,\}$$

El número de bytes que comienzan con 000 ó tienen su cuarto bit igual a 1 es el cardinal de la unión $C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Por la regla de la suma, este número es igual a la suma de los tres cardinales correspondientes a los conjuntos.

Por la parte **b** del ejemplo 3, el conjunto C_1 tiene 16 bytes. Con un argumento enteramente idéntico al usado en la parte **b** antes mencionada, se calcula que el conjunto C_2 tiene también 16 bytes. Por la parte **c** del ejemplo 3, el conjunto C_3 tiene 112 bytes. En consecuencia, el número de bytes que comienzan con 000 ó tienen su cuarto bit igual a 1 es

$$16 + 16 + 112 = 144$$

PROBLEMAS RESUELTOS 5.4

PROBLEMA 1 **a.** ¿Cuántos números telefónicos de 5 dígitos se pueden asignar?

b. ¿Cuántos números telefónicos de 5 dígitos todos distintos existen?

Solución

a. Un número telefónico de 5 dígitos se construye en cinco posos. En cada uno de ellos se selecciona un dígito de los 10 siguientes : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Luego, por la regla del producto, el total de ellos es

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5 = 100.000$$

b. Un número telefónico de 5 dígitos, donde todos son distintos, se construye en cinco pasos. En el primero se selecciona del conjunto de los 10 dígitos; el segundo se selecciona de un conjunto de 9 dígitos; el tercero, de un conjunto de 8; el cuarto, de un conjunto de 7 y el quinto de un conjunto de 6. Por lo tanto, el total de tales números telefónicos es

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30.240$$

PROBLEMA 2 En una versión del lenguaje de programación Pascal, un password consta de una sola letra seguida de hasta 7 símbolos alfanuméricos. Pero, 36 "palabras" de éstas están reservadas para comandos y, por tanto, no pueden usarse como passwords. ¿Cuántos passwords diferentes son posibles en esta versión de Pascal?

Solución

Del alfabeto Español, para estas construcciones, se toman sólo 26 letras. Se descuentan la ch, ll y ñ. Por otro lado, un símbolo alfanumérico es una de las 26 letras del alfabeto o un dígito. Por lo tanto, existen 26 + 10 símbolos alfanuméricos.

Todos los passwords posibles se distribuyen en 8 conjuntos disjuntos: Los que constan exactamente de 1, de 2, de 3, de 4, de 5, de 6, de 7 y de 8 símbolos. Contabilicemos cada uno de estos conjuntos por separado.

Passwords de 1 símbolo. Seleccionamos una letra de 26. Obtenemos: 26

Passwords de 2 símbolos. Seleccionamos una letra de 26 y un símbolo de 36. Obtenemos: 26×36

Passwords de 3 símbolos. Seleccionamos una letra de 26, un símbolo de 36 y un símbolo de 36. Obtenemos: $26 \times 36 \times 36 = 26 \times 36^2$

En forma análoga se obtienen los siguientes resultados:

Passwords de 4 símbolos: 26×36^3, de 5 símbolos: 26×36^4, de 6 símbolos: 26×36^5, de 7 símbolos: 26×36^6, de 8 símbolos: 26×36^7.

Aplicando la regla de suma y quitando las 36 palabras reservadas obtenemos que el número posibles de passwords es:

$$26 + 26 \times 36 + 26 \times 36^2 + 26 \times 36^3 + \ldots + 26 \times 36^7 - 36$$
$$= 26(36 + 36^2 + 36^3 + 36^4 + 36^5 + 36^6 + 36^7) - 36$$

PROBLEMA 3 Usando las reglas de conteo, probar que el conjunto potencia de *un conjunto de n elementos tiene 2^n elementos.*

Solución

Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto de n elementos. Un subconjunto de X se confecciona en n pasos. En el primer paso se toma el elemento x_1 y se decide incluirlo o excluirlo del subconjunto. En el segundo paso se toma el elemento x_2 y se decide incluirlo o excluirlo del subconjunto. Así sucesivamente hasta el paso n, donde se toma el elemento x_n. Cada paso tiene 2 posibilidades, por la regla del producto, el número de subconjuntos de X es

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n} = 2^n$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 5.4

1. Un hombre tiene en su ropero 8 camisas, 6 pantalones y 5 pares de zapatos ¿De cuántas maneras puede vestirse?

2. Se lanza una moneda 5 veces ¿Cuántas posibles sucesiones de caras y sellos se pueden lograr?

3. Un dado es lanzado 3 veces y los resultados son recolectados en forma de una tripleta (tres números ordenados).

   a. ¿Cuántas posibles tripletas se pueden obtener?

   b. ¿Cuántas tripletas tienen un único 2?

   c. ¿Cuántas tripletas tienen un único 6?

   d. ¿Cuántas tripletas tienen un único 2 o un único 6?

   e. ¿Cuántas tripletas tienen los tres números iguales?

   f. ¿Cuántas tripletas tienen los tres números distintos?

4. Se tienen tres ciudades: X, Y y Z . Existen 4 carreteras diferentes que conectan X con Y, 3 carreteras diferentes que conectan Y con Z y 2 carreteras diferentes que conectan X con Z.

   a. ¿Cuántas rutas distintas se pueden tomar para viajar de X a Z?

   b. ¿Cuántas rutas distintas se pueden tomar para viajar de X a Z y regresar a X?

   c. ¿Cuántas rutas distintas se pueden tomar para viajar de X a Z y regresar a X por una ruta diferente (al menos en un tramo) a la de ida?

5. Las placas de los carros tienen 3 letras, seguidas de 3 dígitos.

   a. ¿Cuántas posibles placas existen?

   b. ¿Cuántas placas con letras que no se repiten existen?

   c. ¿Cuántas placas con dígitos que no se repiten existen?

   d. ¿Cuántas placas con letras y dígitos que no se repiten existen?

   Nota. Del alfabeto español tomar sólo 26 letras (se descuentan la ch, ll y la ñ)

6. Un **byte** es una cadena de 8 bits.

   a. ¿Cuántos bytes comienzan con 1100?

   b. ¿Cuántos bytes comienzan y terminan con 1?

   c. ¿Cuántos bytes tiene el segundo o el cuarto (o ambos) bit igual a 1?

   d. ¿Cuántos bytes tienen exactamente un 1?

   e. ¿Cuántos bytes tienen exactamente dos número 1?

f. ¿Cuántos bytes tienen al menos un 1?

g. ¿Cuántos bytes se leen igual de derecha a izquierda y de izquierda a derecha (ejemplo: 00111100)?

7. Se planea exhibir en un estante 3 libros diferentes de FORTRAN y 4 libros diferentes de PASCAL.

a. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los 7 libros (sin restricciones)?

b. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los 7 libros si los lenguajes se deben alternar?

c. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los 7 libros si los libros de FORTRAN deben estar juntos?

d. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los 7 libros si tanto los libros de FORTRAN como los de PASCAL deben estar juntos?

8. De un grupo de 5 candidatos, entre los que se encuentra Alfonso y Rocío, se va a elegir una directiva que consiste en un presidente, un tesorero y un secretario.

a. ¿De cuántas maneras se puede realizar la elección si Alfonso debe estar incluido en la directiva?

b. ¿De cuántas maneras se puede realizar la elección si Alfonso debe estar excluido de la directiva?

c. ¿De cuántas maneras se puede realizar la elección si Alfonso y Rocío deben estar excluidos de la directiva?

d. ¿De cuántas maneras se puede realizar la elección si Alfonso y Rocío deben estar incluidos en la directiva?

e. ¿De cuántas maneras se puede realizar la elección si Alfonso o Rocío debe estar excluido de la directiva?

f. ¿De cuántas maneras se puede realizar la elección si Alfonso o Rocío debe estar incluido en la directiva?

g. ¿De cuántas maneras se puede realizar la elección si se incluye a Alfonso y a Rocío en la directiva, o se excluye a ambos?

h. ¿De cuántas maneras se puede realizar la elección si se incluye a Alfonso como presidente, o se lo excluye de la directiva?

9. Tenemos el siguiente conjunto de dígitos { 1, 2, 3, 4, 5 } con los que formamos números de 3 dígitos

a. ¿Cuántos de estos números existen?

b. ¿Cuántos de estos números no tienen dígitos repetidos?

c. ¿Cuántos de estos números comienzan con 1?

d. ¿Cuántos de estos números comienzan con 1 y no tienen dígitos repetidos?

e. ¿Cuántos de estos números que no comienzan con 1 existen?

f. ¿Cuántos de estos números que no comienzan con 1 y no tienen dígitos repetidos existen?

g. ¿Cuántos de estos números tienen al menos un 1?

10. Se tienen 5 libros distintos de computación, 3 libros distintos de matemática y 2 diccionarios diferentes.

a. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar los libros en un estante?

b. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar los libros en un estante de manera que los diccionarios queden a la izquierda y los libros de matemática a la derecha?

c. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar los libros en un estante de manera que los libros de matemática queden a la izquierda?

d. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar los libros en un estante si los de una misma materia deben estar juntos?

e. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar los libros en un estante si los 2 diccionarios no deben estar juntos?

f. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden seleccionar 2 libros de diferentes materias?

SECCION 5.5

PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

Dado el conjunto $X = \{ a, b, c \}$. Con las 3 letras que conforman este conjunto, se obtienen los siguientes 6 ordenamientos:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

A cada ordenamiento de éstos se le llama una **permutación** del conjunto X o permutación de los objetos a, b, c. En este caso, los ordenamientos consideraron los 3 objetos dados. Sin embargo, se pueden considerar también ordenamientos de 2 de los 3 objetos. Estos son:

$$ab,\ ba,\ ac,\ ca,\ bc,\ cb.$$

y se les da el nombre de permutaciones de 2 objetos del conjunto X. O, simplemente, 2-permutaciones de X.

DEFINICION Dado un conjunto X de n elementos,

a. Una **permutación** de X es una ordenación de los elementos de X.

b. Una ***r*-permutación** de X, donde $r \leq n$, es un ordenamiento de un subconjunto de X de r elementos.

Observar que una permutación de X es una n-permutacion de X.

A una r-permutación de una conjunto de n objetos también se le llama **permutación de *n* objetos tomados de *r* en *r*.**

Denotaremos con $\boldsymbol{P(n, r)}$ al número de r-permutaciones de un conjunto de n elementos.

TEOREMA 5.4 El número de r-permutaciones de un conjunto de n objetos es

$$\boldsymbol{P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}$$

Demostración

Una r-permutación se obtiene en r pasos: Se selecciona el primer objeto, para éste se tienen n posibilidades; se selecciona el segundo objeto, para éste se tienen $n-1$ posibilidades; . . . ; se selecciona el r-ésimo objeto, para éste se tienen $n-r+1$ posibilidades. Luego, de acuerdo, a la regla del producto, tenemos que:

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1).$$

COROLARIO 5.5 **a.** El número de r-permutaciones de un conjunto de n objetos es

$$\boldsymbol{P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

b. El número de permutaciones de un conjunto de n objetos es

$$\boldsymbol{P(n, n) = n!}$$

Demostración

a. A la igualdad obtenida en el teorema lo multiplicamos y dividimos por el número $(r-1)! = (r-1)(r-2)\times\ldots\times 2\times 1$:

$$P(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(r-1)(r-2)\times\ldots\times 2\times 1}{(r-1)(r-2)\times\ldots\times 2\times 1} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

b. $P(n, n) = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = \dfrac{n!}{1} = n!$

EJEMPLO 1 ¿De cuántas maneras se puede elegir un presidente, un secretario y un tesorero de un grupo de 10 postulantes?

Solución

Nos están pidiendo todas las posibles ordenaciones: presidente, secretario y tesorero seleccionados de un conjunto de 10 personas. Es decir, nos están pidiendo P(10, 3). En consecuencia, la elección se puede hacer del siguiente número de maneras:

$$P(10, 3) = 10\times 9\times 8 = 720$$

EJEMPLO 2 **a.** Hallar el número de permutaciones de las letras de la palabra SOFTWARE.

b. Hallar el número de palabras de 4 letras (no necesariamente significativas) que se pueden formar con las letras de la palabra SOFTWARE si ninguna letra se repite.

Solución

a. Nos piden las permutaciones de un conjunto de 8 objetos (letras). Este número es

$$P(8, 8) = 8! = 40.320$$

b. Nos piden las 4-permutaciones de un conjunto de 8 objetos. Este número es

$$P(8, 4) = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1.680$$

EJEMPLO 3 Hallar el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra BANANA.

Solución

Este problema es diferente al anterior. En BANANA, a diferencia de SOFTWARE, algunas letras se repiten. Así, la N se repite 2 veces y la A, 3 veces.

Como táctica inicial, distinguimos las letras que se repiten poniéndoles subíndices, del modo siguiente:

$$B, A_1, N_1, A_2, N_2, A_3$$

Ahora podemos asegurar que tenemos $6! = 720$ permutaciones.

Considerando la letra N, que se repite 2 veces, estas 720 permutaciones las agrupamos en grupos de $2! = 2$, donde los 2 miembros de cada grupo sólo se diferencian por una permutación de N_1, N_2. Así, un tal grupo lo conforman las 2 permutaciones:

$$B, A_1, N_1, A_2, N_2, A_3 \quad \text{y} \quad B, A_1, N_2, A_2, N_1, A_3$$

Cada uno de estos grupos de a 2, al quitar los subíndices, nos queda sólo una permutación. De este modo, de las 720 permutaciones, sólo nos quedan $729/2 = 360$.

Ahora, considerando la letra A, que se repite 3 veces, agrupamos las 360 permutaciones en grupos de $3! = 6$, donde los 6 miembros de cada grupo sólo se diferencian por una permutación de A_1, A_2, A_3. Así, un tal grupo lo conforman las 6 permutaciones:

$$B, A_1, N_1, A_2, N_2, A_3 \qquad B, A_1, N_1, A_3, N_2, A_2 \qquad B, A_2, N_1, A_1, N_2, A_3$$

$$B, A_2, N_1, A_3, N_2, A_1 \qquad B, A_3, N_1, A_1, N_2, A_2 \qquad B, A_3, N_1, A_2, N_2, A_1$$

Cada uno de estos grupos de a 6, al quitar los subíndices, nos queda sólo una permutación. De este modo, de las 360 permutaciones, sólo nos quedan $360/2 = 60$.

En conclusión, existen 60 permutaciones distinguibles de las letras de la palabra BANANA.

Siguiendo el argumento del ejemplo anterior se logra el siguiente resultado:

TEOREMA 5. 6 Si una sucesión S de n objetos tiene n_1 objetos idénticos el tipo 1, n_2 objetos idénticos del tipo 2, . . . , n_k objetos del tipo k. Entonces el número de permutaciones distinguibles de S es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

EJEMPLO 4 Hallar el número de palabras distinguibles que se pueden formar con las letras de la palabra MISSISSIPPI.

Solución

MISSISSIPPI tiene 11 letras: 1 M, 4 I, 4 S y 2 P. Luego el número de palabras distinguibles que se pueden formar con las letras de MISSISSIPPI es

$$\frac{11!}{1!\times 4!\times 4!\times 2!} = 34.650$$

COMBINACIONES

En las permutaciones, el orden es parte esencial. En cambio, en las combinaciones prescindimos de él.

DEFINICION Dado un conjunto X de n elementos. Una ***r*-combinación de** X, donde $r \leq n$, es una selección no ordenada de r objetos de X; es decir, un subconjunto de r elementos de X.

A una r-combinación se le llama también **combinación de *n* objetos tomando *r* a la vez.**

El número de r-combinaciones de un conjunto de n elementos se denota por

$$C(n, r)$$

TEOREMA 5. 7 El número de ***r*-combiaciones** de un conjunto de n objetos es

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Demostración

Toda r-permutación del conjunto X de n objetos se obtiene en 2 pasos sucesivos.

Pase 1: Se selecciona una r-combinación, o sea un subconjunto de r objetos de X.

Paso 2: Se toman todas las permutaciones del subconjunto de r objetos seleccionado en el paso 1.

Luego, por la regla del producto, se tiene

$$P(n, r) = C(n, r) \times r!$$

De donde, $C(n, r) = \dfrac{P(n, r)}{r!} = \dfrac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

EJEMPLO 5 ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de 5 personas de un conjunto de 12 personas?

Solución

Como en el comité no es ordenado, nos están pidiendo:

$$C(12, 5) = \frac{12!}{(12-5)!\times 5!} = \frac{12!}{7!\times 5!} = \frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7!}{7!\times 5!}$$

$$= \frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8}{5!} = \frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} = 11 \times 9 \times 8 = 792$$

EJEMPLO 6 Se tiene un grupo de 12 personas, conformado por 8 mujeres y 4 hombres. ¿De cuántas maneras de se puede seleccionar un comité de 5 personas de las cuales 3 sean mujeres y 2 sean hombres?

Solución

La selección del comité de 5 personas, 3 mujeres y 2 hombres, se puede hacer en 2 pasos: Se selecciona a las mujeres, se selecciona a los hombres.

De las 8 mujeres deben seleccionarse 3. Esto se hace del siguiente número de maneras:

$$C(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!\times 3!} = \frac{8!}{5!\times 3!} = 56$$

De los 4 hombres se seleccionan 2. Esto se hace del siguiente número de maneras:

$$C(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!\times 2!} = \frac{4!}{2!\times 2!} = 6$$

Por la regla del producto, la selección del comité de 5 personas, de las cuales 3 son mujeres y 2 son hombres, se hace del siguiente número de maneras:

$$C(8, 3) \times C(4, 2) = 56 \times 6 = 336$$

EJEMPLO 7 Se tienen 9 libros.

a. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 5 de ellos si un libro específico siempre debe estar incluido?

b. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 5 de ellos si un libro específico siempre debe estar excluido?

Solución

a. Como de los 9 libros un específico de ellos siempre debe estar, de los 8 restantes debemos elegir los 4 que faltan. Esto se hace de $C(8, 4)$ maneras. Esto es,

$$C(8,4) = \frac{8!}{(8-4)!\times 4!} = \frac{8!}{4!\times 4!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5}{4!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2\times 1} = 70$$

b. Como de los 9 libros un específico de ellos debe ser excluido, de los 8 restantes debemos elegir los 5 que nos piden. Esto se hace de $C(8, 5)$ maneras. Esto es,

$$C(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!\times 5!} = \frac{8!}{3!\times 5!} = \frac{8\times 7\times 6}{3!} = \frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1} = 56$$

EJEMPLO 8 **a.** ¿Cuántas manos de 5 cartas se pueden obtener de una baraja estándar de 52 cartas?

b. ¿Cuántas manos de 5 cartas que no tienen cartas de corazones se pueden obtener?

c. ¿Cuántas manos de 5 cartas que tienen, por lo menos una de corazones, se pueden obtener?

Solución

a. Como el orden de las cartas de una mano no interesa, nos están pidiendo el número de subconjuntos de 5. elementos, que se pueden seleccionar de un conjunto de 52 objetos. Esto es,

$$C(52,5) = \frac{52!}{47!\times 5!} = \frac{52\times 51\times 50\times 49\times 48}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} = 13\times 17\times 10\times 49\times 24 = 2.598.960$$

b. Como no queremos que las manos tengan corazones, quitamos las 13 cartas de este tipo (corazones) y la selección la hacemos de las 39 restantes. Por lo tanto, el número de manos de 5 cartas que no tienen corazones es

$$C(39,5) = \frac{39!}{34!\times 5!} = \frac{39\times 38\times 37\times 36\times 35}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} = 13\times 19\times 37\times 9\times 7 = 575.757$$

c. El número de manos de 5 cartas que tienen por lo menos una carta de corazones es igual al número total de manos menos el número de manos que no tienen cartas de corazones. Esto es,

$$C(52,5) - C(39,5) = 2.598.960 - 575.757 = 2.023.203$$

PROBLEMAS RESUELTOS 5.5

PROBLEMA 1 De todas las cadenas de 7 bits ¿cuántas tienen 4 números 1?

Solución

De las 7 posiciones de una cadena seleccionamos 4. Una vez seleccionadas las 4 posiciones, como en todas vamos a colocar el mismo bit 1, el orden de ellas no interesa. Luego, tal número de cadenas es

$$C(7, 4) = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35$$

PROBLEMA 2 ¿De cuántas maneras se puede sentar en una hilera de 8 sillas a un grupo de 4 mujeres y 4 hombres si éstos deben sentarse intercalados?

Solución

Para iniciar la distribución tenemos 2 alternativas: comenzar con una mujer o comenzar con un hombre. Si comenzamos con una mujer, para ocupar la primera silla tenemos 4 posibilidades. Para ocupar la segunda silla, que corresponde a un hombre, también se tienen 4 posibilidades. Para la tercera posición, tenemos 3 posibilidades (3 mujeres). Para la cuarta tenemos 3 posibilidades (3 hombres) y así sucesivamente hasta ocupar la última silla. El siguiente diagrama ilustra el proceso.

4	4	3	3	2	2	1	1

De acuerdo a la regla del producto, existen

$$4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4! \times 4! = 576$$

maneras de sentar intercalados a 4 mujeres con 4 hombres, comenzando con una mujer.

Si comenzamos con un hombre, el mismo argumento anterior nos lleva a concluir que tenemos el mismo número de maneras:

$$4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4! \times 4! = 576$$

Por último, la regla de la suma nos permite afirmar que hay 576 + 576 = 1.152 maneras de sentar en una hilera de 8 sillas a 4 mujeres y 4 hombres, sentados en forma intercalada.

Veamos otra forma de resolver este problema. Comenzamos con las mujeres. Se distribuyen las 4 mujeres en los 4 puestos impares: 1, 3, 5 y 7. Esto se puede hacer de 4! maneras. Ahora, se distribuyen los 4 hombres en los 4 puestos pares: 2, 4, 6 y 8. Esto se puede hacer también de 4! maneras. Por la regla del producto, en total tenemos 4! × 4! = 576 maneras. En forma análoga, si comenzamos con los hombres obtenemos otras 4! × 4! = 576 maneras. Por la regla de la suma, el total se tiene 2 × 4! × 4! = 1.152 maneras.

Los argumentos anteriores nos conducen al siguiente resultado general:

El número de permutaciones en línea e intercaladas de n objetos de un tipo con otros n objetos de otro tipo es $2(n! \times n!)$

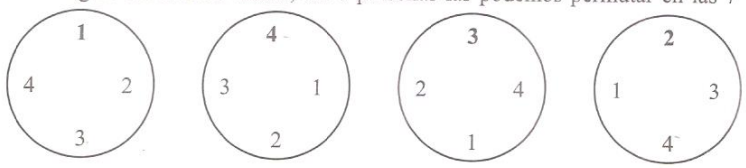
PROBLEMA 3 ¿De cuántas maneras se pueden sentar 8 personas alrededor de una mesa redonda?

Solución

En una distribución circular, a diferencia de una distribución lineal, las posiciones de los puestos indistinguibles. Esto trae como resultado que, al escoger cualquier posición como punto inicial, las 8 posibles elecciones dan un sólo resultado, ya que 7 de ellas son simples rotaciones de una inicial. El siguiente diagrama ilustra este hecho para el caso de 4 personas.

Punto inicial **Punto inicial** **Punto inicial** **Punto inicial**

Una vez elegido un asiento inicial, las 7 personas las podemos permutar en las 7



posiciones restantes, y esto se puede hacer de 7! = 5.040 maneras.

Este argumento nos lleva a concluir el siguiente resultado general:

El número de permutaciones circulares de n objetos es $(n - 1)!$

PROBLEMA 4 ¿De cuántas maneras se puede sentar a un grupo de 4 mujeres y 4 hombres alrededor de una mesa redonda en forma intercalada?

Solución

En una distribución circular, como no hay primera ni última silla, da igual comenzar la distribución con una mujer o con un hombre. Elegimos una silla inicial y allí sentamos a una mujer (o a un hombre). Nos quedan 3 mujeres para sentarlas en 3 posiciones. Esto se puede hacer de 3! maneras. Los 4 hombres son distribuidos en 4 posiciones. Esto se puede hacer de 4! maneras. Finalmente, por la regla del producto, las 4 mujeres y los 4 hombres se pueden sentar alrededor de una mesa redonda en forma intercalada de $3! \times 4! = 144$ maneras.

El argumento anterior nos lleva a concluir el siguiente resultado general:

El número de permutaciones circulares e intercaladas de n objetos de un tipo con otros n objetos de otro tipo es $(n - 1)! \times n!$

PROBLEMAS PROPUESTOS 5.5

1. Hallar el valor de

a. $P(n, n)$ **b.** $P(n, n-1)$ **c.** $P(n+1, n-1)$

d. $C(n, n)$ **e.** $C(n, n-1)$ **f.** $C(n+1, n-1)$

2. Probar que

a. $P(n, n) = n\,P(n-1, n-1)$ **b.** $C(n, r) = C(n, n-r)$

c. $C(n+1, r) = C(n, r-1) + C(n, r)$ **d.** $C(n, r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1)$

3. Sea $X = \{ a, b, c, d \}$. Hallar

a. El número de 3-permutaciones de X **b.** El número de 3-combinaciones de X

4. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar de un grupo de 7 candidatos un presidente, un secretario y un tesorero?

5. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar de un grupo de 7 candidatos un comité de 3 miembros?

6. ¿Un equipo de basketball cuenta con 10 jugadores uniformados.

a. ¿De cuántas maneras se puede iniciar el juego con 5 jugadores?

b. ¿De cuántas maneras se puede iniciar el juego con 5 jugadores si el jugador más alto y el más bajo entran al comienzo?

7. En un billetera hay un billete de 5 Bs, uno de 10 Bs, uno de 20 Bs, uno de 50 Bs y uno de 100 Bs. ¿Cuántas sumas distintas de dinero se pueden obtener sacando 2 billetes?

8. En un billetera hay un billete de 5 Bs, uno de 10 Bs, uno de 20 Bs, uno de 50 Bs y uno de 100 Bs. ¿Cuántas sumas distintas de dinero se pueden obtener sacando 1 o más billetes?

9. ¿Cuántos bytes (cadenas de 8 bits) contienen exactamente 3 ceros?

10. ¿Cuántos bytes contienen exactamente 3 ceros seguidos y 5 unos?

11. Una reunión de condominio está conformado por 6 hombres y 7 mujeres.

a. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité formado por 3 hombres y 4 mujeres?

b. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de 4 personas donde todos son hombres?

c. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de 4 personas que contenga, al menos, una mujer?

d. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de 4 personas que contenga, a lo sumo, un hombre?

e. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de 4 personas que contenga personas de ambos sexos?

f. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de 4 personas en tal forma que Juan y María no estén juntos (ambos están en la reunión)?

12. Se tiene una baraja de póker de 52 naipes.

a. ¿De cuántas maneras se pueden arreglar las 52 cartas?

b. ¿Cuántas manos de 5 cartas, donde todas son espadas, existen?

c. ¿Cuántas manos de 5 cartas, donde todas son del mismo palo (espadas, corazones, tréboles o diamantes), existen?

d. ¿Cuántas manos de 5 cartas, donde 3 son de una misma denominación (el mismo número) y 2 de otra, existen?

e. ¿Cuántas manos de 5 cartas, donde 2 son de una misma denominación (el mismo número), 2 de otra y una de una tercera, existen?

13. En una caja hay 8 bolas rojas y 7 negras. ¿De cuántas maneras pueden sacarse de la caja 5 en tal forma que

a. Las 5 sean rojas

b. Las 5 sean negras

c. 2 sean rojas y 3 sean negras

d. 3 sean rojas y 2 sean negras

14. Se tira un moneda 6 veces y se anotan los resultados

a. ¿Cuántos resultados posibles existen?

b. ¿Cuántos resultados tienen exactamente una cara?

c. ¿Cuántos resultados tienen exactamente 2 caras?

d. ¿Cuántos resultados tienen a lo sumo 3 caras?

e. ¿Cuántos resultados tienen la misma cantidad de caras que de sellos?

15. En un salón de 15 estudiantes de matemática 2 son mujeres .

a. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar 2 estudiantes?

b. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar 2 estudiantes hombres?

c. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un conjunto de 2 estudiantes que contenga exactamente una mujer?

d. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un conjunto de 2 estudiantes que contenga al menos una mujer?

16. Sea la palabra GROUP.

a. ¿Cuántas permutaciones de las letras de esta palabra existen?

b. ¿Cuántas permutaciones de las letras de esta palabra que tienen las 2 vocales juntas existen?

c. ¿Cuántas permutaciones de las letras de esta palabra que tienen la O antes que la U (como GROUP, ORGUP, etc.) existen?

17. ¿Cuántas permutaciones distinguibles de las letras de una de las siguientes palabras existen?

a. PASCAL **b.** CARACAS **c.** KIKIRIGUIKI

18. Si del alfabeto español quitamos la letras ch, ll y ñ nos quedan 26 letras, de las cuales 21 son consonantes y 5 son vocales. Con estas 26 letras formamos palabras de 6 letras (no distinguimos entre mayúsculas o minúsculas). ¿Cuántas de esas palabras tienen:

a. Exactamente una vocal **b.** Exactamente 2 vocales

c. A lo más una vocal **d.** Al menos una vocal

e. Al menos 2 vocales

19. **a.** ¿De cuántas maneras 7 personas pueden formar una cola?

b. ¿De cuántas maneras 7 personas pueden sentarse alrededor de una mesa circular?

c. ¿De cuántas maneras 7 personas pueden sentarse alrededor de una mesa circular si 2 de ellas insisten en sentarse juntas?

20. **a.** ¿De cuántas maneras 5 argentinos y 5 venezolanos forman una cola?

b. ¿De cuántas maneras 5 argentinos y 5 venezolanos forman una cola si cualquier par de argentinos no pueden estar juntos?

c. ¿De cuántas maneras 5 argentinos y 4 venezolanos forman una cola si cualquier par de argentinos no pueden estar juntos?

21. **a.** ¿De cuántas maneras 5 argentinos y 5 venezolanos pueden sentarse alrededor de una mesa redonda?

b. ¿De cuántas maneras 5 argentinos y 5 venezolanos pueden sentarse alrededor de una mesa redonda si cualquier par de argentinos no pueden estar juntos?

c. ¿De cuántas maneras 8 argentinos y 8 venezolanos pueden sentarse alrededor de una mesa redonda si cualquier par de argentinos no pueden estar juntos?

BREVE HISTORIA DE LOS SISTEMAS NUMERICOS

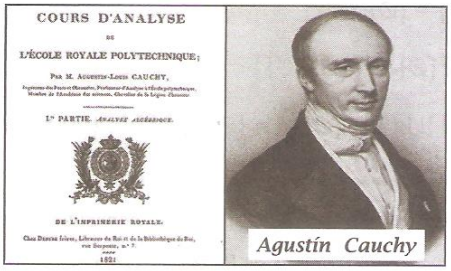
Los números naturales aparecen en la historia del hombre desde muy temprano, desde que el hombre primitivo sintió la necesidad de contar. Sin embargo, su estudio sistemático se inicia en la Grecia Antigua, alrededor del siglo VI A. C., con ***Tales de Mileto*** *(640-547 A. C.) y* ***Pitágoras*** *(580-500 A. C.). Pitágoras, después de viajar por Mesopotamia y Egipto, se estableció en Crotona, en el sur de Italia. Allí fundó su famosa* ***Escuela Pitagórica****, que fue una asociación secreta dedicada al estudio de la filosofía, matemática, ciencias naturales. En el centro de la filosofía pitagórica se encontraban ciertas creencias míticas de los números naturales. Predicaba que todo lo existente: la matemática, la física, la moral, la metafísica y, en general, el universo entero, puede ser construido a partir de los números naturales.*

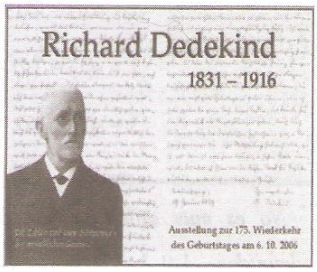
Fue humillante y desbastador para los pitagóricos cuando uno de sus miembros, ***Hipaso de Metaponto,*** *descubrió que no podía obtener, a partir de los naturales, el número irracional* $\sqrt{2}$ *. Esta parte de la historia la relatamos al final del capítulo 2.*

El descubrimiento de los irracionales trajo consigo la primera de las tres crisis en los ***fundamentos de la matemática****. Esta fue, en gran parte, solucionada por* ***Eudoxio de Cnido*** *(408–355 A. C.), mediante su* ***Teoría de las Proporciones,*** *expuesta en el Libro V de los* ***Elementos*** *de Euclides.*

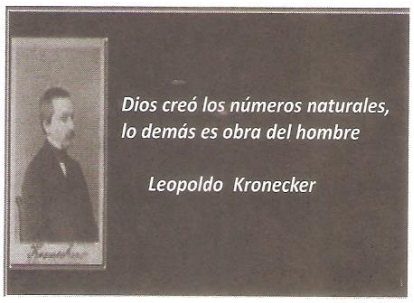
La segunda crisis en los fundamentos de la matemática tuvo lugar después que Newton (1.642-1.727) y Leibniz (1.646-1.716) inventaran el cálculo, a finales del siglo XVII. Muchos matemáticos, fascinados con el poder de esta nueva ciencia, lograron muchos resultados, descuidando sus correspondientes justificaciones. Esto trajo como consecuencia la aparición de paradojas. Con el objeto de enfrentar estas dificultades, el matemático francés ***Agustín Cauchy*** *(1.789-1.857) comenzó el estudio riguroso del cálculo usando el concepto de límite. Esta ideas las expone en su libro Cours d'Analyse publicado en 1.821. Para la exposición de sus ideas se precisaba una construcción sistemática del* ***sistema de los números reales****. Esto lo logra, en 1.872,* ***Richard Dedekind*** *(1.831-1.916), mediante ciertos subconjuntos*

disjuntos de números racionales, que ahora se los llama las ***cortaduras de Dedekind****.*





Gerg Cantor *(1.845-1.918) y* ***Karl Weierstrass*** *(1.815-1.897) consiguieron el mismo objetivo, pero con otro método más manipulable y más práctico, utilizando sucesiones convergentes de números racionales. La segunda crisis es solventada y vuelve a renacer, en parte, la idea de Pitágoras, logrando que los números naturales constituyen los ladrillos del edificio de la matemática. Esta vez el promotor de tal idea es* ***Leopoldo Kronecker*** *(1.823-1.891) a quien se le atribuye la frase* ***"Dios creó los números naturales, lo demás es obra del hombre".***



Peano *nos presentó el sistema de los números naturales axiomáticamente, donde el concepto de número natural es un concepto sin definición. A continuación presentamos un modelo para este sistema. En primer lugar definimos el sucesor de un conjunto cualquiera A, s(A), como:*

$$s(A) = A \cup \{A\}.$$

Ahora establecemos:

$$0 = \varnothing$$

$$1 = s(0) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$$

$$2 = s(1) = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

$$3 = s(2) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

etc.

No es muy difícil probar el conjunto determinado por los elementos antes definidos, $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, *satisface los axiomas de Peano. Ahora, emulando a Kronecker, podemos decir:* ***Dios creó al vacío, lo demás es obra del hombre.***

}{{∅, {∅}}}

os elementos antes
. Ahora, emulando a
del hombre.

6

RELACIONES

CHARLES SANDERS PIERCE
(1.839-1.914)

6.1 INTRODUCION

6.2 RELACIONES BINARIAS

6.3 RELACIONES EN UN CONJUNTO

6.4 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

6.5 RELACIONES DE ORDEN

¿SABIAS QUE NO HAY PREMIO NOBEL EN MATEMATICAS?

CHARLES SANDERS PIERCE (1.839-1.914)

***CHARLES SANDERS PIERCE** es considerado como el más original y más versátil intelectual norteamericano. Produjo trabajos relevantes en muchos campos: matemática, lógica, filosofía, astronomía, química, geología, cartografía, sicología, econometría, etc. Es fundador del **pragmatismo,** un movimiento filosófico dominante en América a fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX.*

Charles Sanders Pierce nació en Cambridge, Massachusetts, Estados Unidos, en septiembre de 1.839. Estudió en la Universidad de Harvard, donde se graduó de químico en 1.863. Desde 1.879 a 1.884 enseñó lógica en la Universidad de Johns Hopkins, en Baltimore, Maryland.

*En 1.883, Peirce publica el artículo, **"The Logic of Relatives"** en el que, basándose en los trabajos de Boole y de De Morgan, hizo una novedosa presentación de su **teoría de las relaciones,** tratadas éstas como entes matemáticos. En esta teoría, los pares ordenados pasan a jugar el papel primordial, tal cual como se concibe actualmente el concepto de relación.*

ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

Charles S. Pierce nace cuando gobernaba Venezuela el General José Antonio Páez y muere el mismo año que estalla la Primera Guerra Mundial (1.914).

riginal y más versátil
n muchos campos:
artografía, sicología,
ovimiento filosófico
lo XX.

Estados Unidos, en
donde se graduó de
Iniversidad de Johns

latives" en el que,
ovedosa presentación
atemáticos. En esta
cual como se concibe

TANTES

José Antonio Páez y
14).

SECCION 6.1
INTRODUCCION

El concepto de relación lo encontramos presente en todos los ámbitos del qué hacer humano. Así, en la vida diaria tenemos las relaciones "es padre de", "es esposo de", "es el jefe de", etc. y en la matemática tenemos las relaciones "es paralelo a", "es menos que", "es la suma de", etc.

Examinemos de cerca la relación "es esposo de". En la forma que estamos presentando esta relación, su significado es vago. Si queremos ser más precisos debemos indicar que esta relación se cumple entre el conjunto H de hombres y el conjunto M de mujeres de cierta comunidad. Aún más, en lugar de decir "es esposo de" es más significativo decir "x es esposo de y". Pero, entonces lo que tenemos es la función proposicional

$$(H, M, E(x, y)),$$

donde $E(x, y)$: x es esposo de y, H es el dominio de la variable x y M es el dominio de la variable y.

Esta definición es perfectamente legal, pero no es cómoda para trabajar con ella. Buscamos una definición más práctica y más manipulable.

La relación "x es esposo de y" selecciona pares ordenados del producto cartesiano $H \times M$. En efecto, nos proporciona las parejas $(x, y) \in H \times M$ que están casadas; es decir, los pares (x, y) tales que la proposición "x es esposo de y" es verdadera. Pero el conjunto de las parejas casadas no es otra cosa que el dominio de verdad de la función proposicional $(H, M, E(x, y))$. Pero este dominio de verdad es un subconjunto de $H \times M$.

Como resumen de lo explicado, concluimos que una **relación entre dos conjuntos X e Y** es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$. Este será el punto de vista que adoptaremos para definir una relación.

Las relaciones pueden ser clasificadas de acuerdo al número de objetos que conectan. Las que conectan dos elementos, como "x es esposo de y", es una **relación binaria.** Las que conectan tres elementos, como "z es la suma de x e y", es una **relación ternaria**, etc. En general, una relación n-aria es una relación que conecta n elementos, donde n es un natural mayor o igual a 1. Si $n = 1$, tenemos una relación unitaria. Nuestro interés se concentrará mayormente en las relaciones binarias, a las que llamaremos simplemente relaciones.

SECCION 6.2
RELACIONES BINARIAS

DEFINICION. Sean X e Y dos conjuntos. Una **relación de X en Y** es un subconjunto R del producto cartesiano $X \times Y$. Es decir,

$$R \text{ es una relación de } X \text{ en } Y \Leftrightarrow R \subset X \times Y.$$

El conjunto X es el **conjunto de partida** de la relación R, y el conjunto Y es el conjunto de **llegada.**

En el caso particular de que $Y = X$, en lugar de decir que R es una relación de X en X, diremos que R es una **relación en X.**

Los elementos de R son pares ordenados. Si (x, y) es un elemento de R, en lugar de escribir $(x, y) \in R$, escribiremos $x\,R\,y$. Es decir,

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow x\,R\,y$$

$x\,R\,y$ se lee **"x está relacionado con y, según la relación R".**

Usaremos las letras R, S, T, etc., para representar relaciones.

EJEMPLO 1 Si $X = \{ a, b, c, d \}$ y $Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, los siguientes subconjuntos de $X \times Y$ son relaciones de X en Y:

a. $R = \{ (a, 2), (b, 1), (b, 4), (c, 5) \}$. **b.** $S = \{ (b, 3), (c, 4) \}$.

c. $T = \{ (a, 1) \}$. **f.** $X \times Y$ **g.** $\varnothing$

De todas estas relaciones de X en Y, la que tiene más elementos es la relación $X \times Y$ y la que tiene menos es la relación vacía $\varnothing$.

EJEMPLO 2 La siguiente relación S en $\mathbb{R}$

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ x \leq y \}$$

es la relación "menor o igual" en $\mathbb{R}$. En este caso,

$$x\,S\,y \Leftrightarrow x \leq y$$

EJEMPLO 3 Sea U el conjunto referencial. La relación de inclusión en $\wp(U)$ es la relación

$$R = \{ (A, B) \in \wp(U) \times \wp(U) \ / \ A \subset B \}.$$

EJEMPLO 4 Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de proposiciones. La relación

$$R = \{ (p, q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \ / \ p \Rightarrow q \}$$

es la relación de implicación lógica en $\mathcal{P}$.

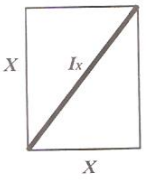
EJEMPLO 5 Sea X un conjunto no vacío. La siguiente relación en X

$$I_X = \{ (x, x) \ / \ x \in X \}$$

es llamada **relación diagonal en X o relación identidad de X.** En este caso,

$$x \, I_X \, y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

La relación I_X no es tra cosa que la relación de igualdad en X.



TEOREMA 6.1 Si $\#X = m$ y $\#Y = n$, entonces existen 2^{mn} relaciones de X en Y.

Demostración

R es una relación de X en Y $\Leftrightarrow$ $R \subset X \times Y$ $\Leftrightarrow$ $R \in \wp(X \times Y)$.

Luego, el número de relaciones de X en Y es

$$\# \wp(X \times Y) = 2^{\#(X \times Y)} = 2^{mn}$$

COROLARIO Si $\#X = m$, entonces existen 2^{m^2} relaciones en X.

EJEMPLO 6 Si $X = \{ a, b, c \}$ e $Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, entonces el número de relaciones de X en Y es

$$2^{(3)(5)} = 2^{15} = 32.768$$

DOMINIO E IMAGEN DE UNA RELACION

DEFINICION Sea R una relación de X en Y. El **dominio** de R es el conjunto

$$\mathbf{dom}(R) = \{ x \in X \ / \ (x, y) \in R, \text{ para algún } y \in Y \},$$

y el **rango o imagen** de R es el conjunto

$$\mathbf{rang}(R) = \{ y \in Y \ / \ (x, y) \in R, \text{ para algún } x \in X \}.$$

En otros términos, el dominio de una relación es el conjunto formado por las primeras componentes de los pares ordenados que constituyen la relación. El rango es el conjunto formado por las segundas componentes.

EJEMPLO 7 Si $X = \{ a, b, c, d \}$, $Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ y $R \subset X \times Y$ es la relación

$$R = \{ (a, 2), (b, 1), (b, 4), (c, 5) \},$$

tenemos que

$$\text{dom}(R) = \{ a, b, c \} \quad \text{y} \quad \text{rang}(R) = \{ 1, 2, 4, 5 \}.$$

REPRESENTACION GRAFICA DE RELACIONES

Existen varias formas de representar gráficamente una relación. Las más usuales son la representación cartesiana, la representación matricial y la representación sagital.

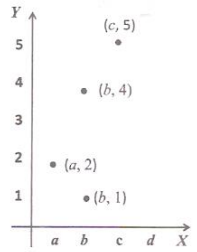
REPRESENTACION CARTESIANA

Cuando el conjunto de partida y el de llegada de una relación son subconjuntos de $\mathbb{R}$, la relación tiene una representación cartesiana. Para esto, se toman como abscisas los elementos del conjunto de partida y como ordenadas, el conjunto de llegada. En el plano se marcan los pares ordenados que conforman la relación.

EJEMPLO 8 Si $X = \{ a, b, c, d \}$, $Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ y R la relación

$$R = \{ (a, 2), (b, 1), (b, 4), (c, 5) \},$$

la representación cartesiana de R es la siguiente



REPRESENTACION MATRICIAL

La representación matricial se usa cuando los conjuntos de partida y de llegada de la relación son conjuntos finitos y con pocos elementos.

Para obtener tal representación se asigna a cada elemento del conjunto de partida una fila y a cada elementos del conjunto de llegada una columna.

Si (x, y) está en la relación, en la intersección de la fila que corresponde a x con la columna que corresponde a y, escribimos 1. En el caso contrario, escribiremos 0. La configuración rectangular de ceros y unos que se obtiene se llama **matriz de la relación**. Así, la matriz de la relación del ejemplo anterior es

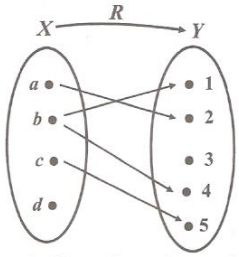
R	1	2	3	4	5
a	0	1	0	0	0
b	1	0	0	1	0
c	0	0	0	0	1
d	0	0	0	0	0

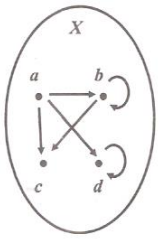
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observar que la matriz tiene 4 filas, que es el número de elementos de X, y 5 columnas, que es el número de elementos de Y. Este hecho se expresa diciendo que la matríz es de orden 4x5.

REPRESENTACION SAGITAL

La representación sagital es la más usada de las representaciones. Esta, igual que la matricial, se usa cuando los conjuntos de partida y llegada son finitas. La representación sagital se obtiene representando mediante diagramas de Venn el conjunto de partida y el de llegada. Luego se unen con flechas los elementos relacionados. Así, la representación sagital de la relación del ejemplo 8 es el siguiente diagrama de la izquierda.





Si en una relación, el conjunto de partida y el de llegada coinciden, ésta se representa mediante un solo diagrama de Venn y las flechas se representan interiormente. Así, la siguiente relación S en $X = \{ a, b, c, d \}$

$$S = \{ (a, b),\ \ (b, b),\ \ (a, c), (a, d),\ \ (b, c),\ \ (d, d) \}.$$

es representada en el diagrama anterior de la derecha

RELACION INVERSA

Tenemos que: x es padre de y $\Leftrightarrow$ y es hijo de x.

Podemos decir que la relación "es hijo de" es inversa de la relación "es padre de".

DEFINICION Sea R una relación de X **en** Y. Se llama **relación inversa de** R a la relación R^{-1} de Y **en** X dada por

$$R^{-1} = \{ (y, x) \in Y \times X \ / \ (x, y) \in R \}$$

O sea, $\quad y\, R^{-1} x \Leftrightarrow x\, R\, y$

Observar que se verifica que

1. $\text{dom}(R^{-1}) = \text{rang}(R)$ **2.** $\text{rang}(R^{-1}) = \text{dom}(R)$

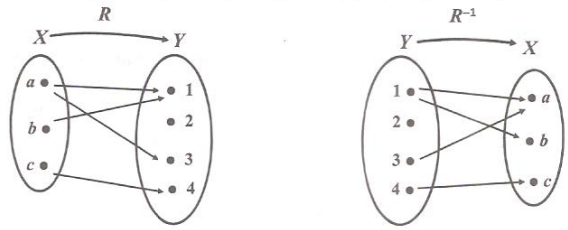
EJEMPLO 9 Si $X = \{ a, b, c \}$, $Y = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ y $R \subset X \times Y$ es dado por

$$R = \{ (a, 3), (a, 1), (b, 1), (c, 4) \}, \text{ entonces}$$

$$R^{-1} = \{ (3,a), (1,a), (1, b), (4, c) \}$$

Además,

$\text{dom}(R^{-1}) = \{1, 3, 4 \} = \text{rang}(R)$ y $\text{rang}(R^{-1}) = \{ a, b, c \} = \text{dom}(R)$



El siguiente teorema dice que la inversa de la inversa de una relación es ella misma.

TEOREMA 6.2 Si R es una relación de X en Y, entonces

$$(R^{-1})^{-1} = R$$

Demostración

$$(x, y) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow x\,(R^{-1})^{-1}\, y \Leftrightarrow y\, R^{-1} x \Leftrightarrow x\, R\, y \Leftrightarrow (x, y) \in R$$

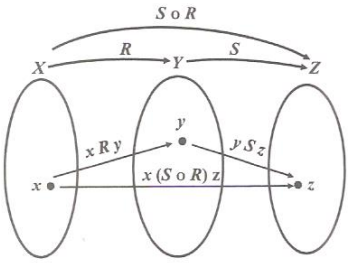
Luego, $(R^{-1})^{-1} = R$.

COMPOSICION DE RELACIONES

DEFINICION Sea R una relación de X en Y y S una relación de Y en Z. Se llama **composición de** R **con** S a la siguiente relación de X en Z

$$S \circ R = \{ (x, z) \in X \times Z \ / \ \exists\, y \in Y \text{ tal que } x\, R\, y \ \wedge \ y\, S\, z \}$$

O sea, $\quad x\,(S \circ R)\, z \Leftrightarrow \exists\, y \in Y \ / \ x\, R\, y \ \wedge \ y\, S\, z$



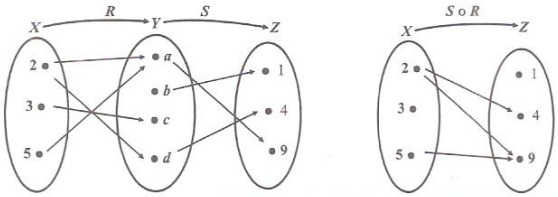
Para definir la composición de R con S es necesario que el conjunto de llegada de R sea igual al conjunto de partida de S. Este requisito puede ser aligerado: Podemos pedir que el conjunto de llegada de R esté contenido en el conjunto de partida de S.

Observar que el orden en que se escriben R y S en la composición de $S \circ R$ es inverso al orden en que se dan R y S.

EJEMPLO 10 Sean $X = \{ 2, 3, 5 \}$, $Y = \{ a, b, c, d \}$ y $Z = \{ 1, 4, 9 \}$

Sea R de X en Y y sea S de Y en Z dadas por,
$R = \{ (2, a), (2, d), (3, c), (5, a) \}$, $S = \{ (a, 9), (b,1), (d, 4) \}$,
Entonces

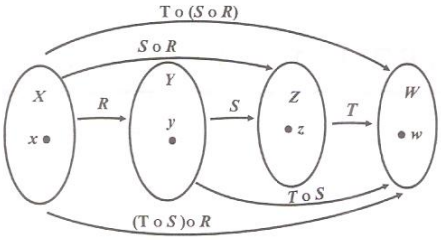
$$S \circ R = \{ (2, 9), (2, 4), (5, 9) \}.$$



TEOREMA 6.3 **La composición de relaciones es asociativa.**

Si R es una relación de X en Y, S es una relación de Y en Z y T es una relación de Z en W, entonces

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$



Demostración

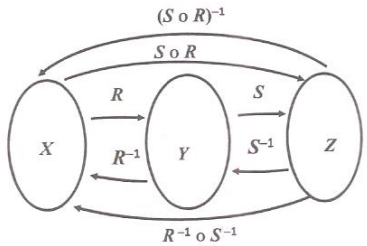
$$
\begin{aligned}
x\,[T\circ(S\circ R)]\,w &\Leftrightarrow \exists z\in Z/\ x(S\circ R)z \ \wedge\ zTw\\
&\Leftrightarrow \exists z\in Z/\ (\exists y\in Y/\ xRy \ \wedge\ ySz) \ \wedge\ zTw\\
&\Leftrightarrow \exists y\in Y/\ xRy \wedge (\exists z\in Z/ ySz \ \wedge\ zTw)\\
&\Leftrightarrow \exists y\in Y/ xRy \ \wedge\ y(T\circ S)w\\
&\Leftrightarrow x\,[(T\circ S)\circ R]\,w
\end{aligned}
$$

Luego, $T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R$.

El siguiente teorema nos dice que la inversa de una composición es igual a la composición de las inversas, pero con el orden permutado.

TEOEMA 6.4 Si R es una relación de X en Y y S es una relación de Y en Z, entonces

$$(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$$



Demostración.

$$
\begin{aligned}
z(S\circ R)^{-1}x &\Leftrightarrow x(S\circ R)z \Leftrightarrow \exists y\in Y/\ xRy \ \wedge\ ySz\\
&\Leftrightarrow \exists y\in Y/\ yR^{-1}x \ \wedge\ zS^{-1}y \Leftrightarrow \exists y\in Y/\ zS^{-1}y \ \wedge\ yR^{-1}x\\
&\Leftrightarrow z(R^{-1}\circ S^{-1})x
\end{aligned}
$$

Luego, $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$.

PROBLEMAS RESUELTOS 6.2

PROBLEMA 1 Hallar todas las relaciones definidas en el conjunto $X=\{a\}$

Solución

Como $X=\{a\}$, tenemos que $X\times X=X^2=\{(a,a)\}$.

Las relaciones en $X = \{ a \}$ son los elementos del conjunto potencia $\wp(X^2)$.
Como $X^2 = \{ (a, a) \}$ es unitario, $\wp(X^2)$ tiene sólo dos elementos:

$$\wp(X^2) = \{ \varnothing, \{(a, a)\} \} = \{ \varnothing, X^2 \}$$

Luego, en X sólo existen dos relaciones: $R_1 = \varnothing$ y $R_2 = X^2$

PROBLEMA 2 Sea $X = \{ 2, 3, 4 \}$, $Y = \{ 4, 5, 6, 7 \}$ y R la relación de X en Y:

$$x\,R\,y \Leftrightarrow x \text{ divide a } y$$

a. Hallar los elementos de R.

b. Representar a R matricialmente y sagitalmente.

c. Hallar dom(R) y rang(R).

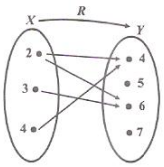
d. Hallar la relación inversa R^{-1}.

Solución

a. $R = \{ (2, 4), (2, 6), (3, 6), (4, 4) \}$

b.

$$M = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



c. dom(R) = $\{ 2, 3, 4 \} = X$. rang(R) = $\{ 4, 6 \}$.

d. $R^{-1} = \{ (4, 2), (6, 2), (6, 3), (4, 4) \}$.

PROBLEMA 3 Si $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 4, 6, 9, 16, 25\}$, $Z = \{2, 3, 8, 25/2\}$,

R es la relación de X en Y dada por $x\,R\,y \Leftrightarrow y = x^2$,
S es la relación de Y en Z dada por $y\,S\,z \Leftrightarrow y = 2z$

Hallar **a.** $S \circ R$ **b.** $R^{-1} \circ S^{-1}$

Solución

Tenemos que: $R = \{ (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25) \}$
$S = \{ (4, 2), (6, 3), (16, 8), (25, 25/2) \}$

Luego,

a. $S \circ R = \{ (2, 2), (4, 8), (5, 25/2) \}$

b. $R^{-1} \circ S^{-1} = (S \circ R)^{-1} = \{ (2, 2), (8, 4), (25/2, 5) \}$

PROBLEMAS PROPUESTOS 6.2

1. Sean $X = \{ 3, 5, 7 \}$, $Y = \{ 1, 3, 11, 17 \}$ y $R \subset X \times Y$ la relación

$$x\,R\,y \Leftrightarrow x + y < 15$$

Hallar: **a.** dom(R) **b.** rang(R), **c.** La matriz de R **d.** R^{-1}

2. Sean $X = \{ 0, 1, -1, 2 \}$, $Y = \{ 4, -3, 5, 2 \}$, $Z = \{-4, 3, 7\}$ y sean R y S las relaciones

$$R \subset X \times Y: \; x\,R\,y \Leftrightarrow (x + y) \text{ es par.}$$
$$S \subset Y \times Z: \; y\,S\,z \Leftrightarrow (y - z) \text{ es impar}$$

Hallar: **a.** $S \circ R$ **b.** $R^{-1} \circ S^{-1}$

3. Sea $X = \{ a, b \}$. ¿Cuántas relaciones en X existen?

4. R y S son las relaciones en $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, dadas por

$$R = \{ (n, 2n) \,/\, n \in \mathbb{N}^* \} \qquad S = \{ (n, 3n) \,/\, n \in \mathbb{N}^* \}$$

Hallar: **a.** $S \circ R$ **b.** $R^{-1} \circ S^{-1}$

5. Representar en el plano cartesiano las siguientes relaciones en $\mathbb{R}$.

a. $x\,R\,y \Leftrightarrow y \geq x^2$ **b.** $x\,S\,y \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} \leq 1$

Hallar el dominio y el rango de cada una de ellas.

6. Si $X = \{ a, b, c \}$ y $Y = \{ m \}$.

a. ¿Cuántas relaciones de X en Y se pueden definir?

b. Hallar todas estas relaciones.

7. Si R es una relación de X en Y, probar que:

a. $R \circ I_X = R$ **b.** $I_Y \circ R = R$

8. Si R y S son dos relaciones de X en Y probar que

$$R^{-1} = S^{-1} \Leftrightarrow R = S$$

9. **a.** Hallar dos relaciones R y S tales que $S \circ R \neq R \circ S$.

b. Hallar dos relaciones R y S tales que $S \circ R = R \circ S$.

c. ¿Es la composición de relciones una operación conmutativa?

10. Si R y S son relaciones de X en Y, probar que

a. dom($R \cup S$) = dom(R) $\cup$ dom(S). **b.** rang($R \cup S$) = rang(R) $\cup$ rang(S)

b. dom($R \cap S$) $\subset$ dom(R) $\cap$ dom(S). **d.** rang($R \cap S$) $\subset$ rang(R) $\cap$ rang(S).

e. dom(R) – dom(S) $\subset$ dom($R - S$). **f.** rang(R) – rang(S) $\subset$ rang($R - S$).

11. Si R y S son relaciones de X en Y, probar que
a. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$. **b.** $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$. **c.** $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$.

12. Sea R una relación de X en Y. Se llama **relación complementaria de R**, a la relación $\overline{R}$ de X en Y del modo siguiente:

$$x\,\overline{R}\,y \Leftrightarrow (x, y) \notin R. \quad \text{O sea} \quad \overline{R} = X \times Y - R$$

Probar que

$$(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$$

SECCION 6.3

RELACIONES EN UN CONJUNTO

En esta sección y en las siguientes nos ocuparemos de estudiar las relaciones definidas en un conjunto; es decir, de las relaciones en las que el conjunto de partida coincide con el de llegada.

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se tienen dos relaciones de esencial importancia: La relación de igualdad y la relación "menor o igual". Uno de nuestros objetivos es generalizar estas dos relaciones, para obtener las relaciones de equivalencia y las relaciones de orden, respectivamente. A cada una de estas les dedicaremos una sección aparte.

DEFINICION Sea R una relación de un conjunto X. Se dice que

1. R es **reflexiva** si y sólo si $\forall x,\ x\,R\,x$
2. R es **simétrica** si y sólo si $x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$
3. R es **antisimétrica** si y sólo si $x\,R\,y \wedge y\,R\,x \Rightarrow x = y$
4. R es **transitiva** si y sólo si $x\,R\,y \wedge y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$

EJEMPLO 1 La relación de igualdad de cualquier conjunto X, es decir, la relación diagonal I_X, es, obviamente, reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

EJEMPLO 2 La relación $\leq$ y la relación $\geq$ en $\mathbb{R}$ son reflexivas, antisimétricas y transitiva, pero no son simétricas.

EJEMPLO 3 La relación de inclusión " $\subset$ " en $\wp(U)$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero no es simétrica.

EJEMPLO 4 La relación de paralelismo en el conjunto de las rectas de un plano es reflexiva, simétrica y transitiva, pero no es antisimétrica.

EJEMPLO 5 En $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, tenemos las relaciones D y M definidas por

1. $n\,D\,m \Leftrightarrow n$ divide a m **2.** $n\,M\,m \Leftrightarrow n$ es múltiplo de m.

Estas relaciones son reflesivas, antisimétricas y transitivas, pero no son simétricas. Observar que M es la inversa de D.

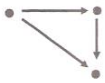
Las relaciones reflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas pueden reconocerse a través de su representación sagital. En efecto, de la definición anterior obtenemos los siguientes criterios:

La representación sagital de una relación corresponde a una relación:

1. **Reflexiva** si y sólo si cada vértice tiene un lazo.

2. **Simétrica** si y sólo si para cada flecha que une dos vértices distintos existe otra de sentido contrario.

3. **Antisimétrica** si y sólo si ningún par de vértices distintos tiene camino de ida y vuelta.
4. **Transitiva** si y sólo si para cada par de flechas consecutivas existe una tercera flecha que une el vértice inicial de la primera flecha con el vértice final de la segunda flecha.



EJEMPLO 6 Sean R_1, R_2, R_3, R_4 cuatro relaciones cuyas representaciones gráficas son las siguientes:

R_1 R_2 R_3 R_4 R_5

Tenemos que:

1. R_1 es reflexiva, antisimétrica, transitiva y no es simétrica.
2. R_2 es simétrica, no es reflexiva, ni antisimétrica ni transitiva.
3. R_3 es antisimétrica, transitiva y no es reflexiva ni simétrica.
4. R_4 no es ninguno de los 4 tipos.
5. R_5 es de los 4 tipos.

El siguiente teorema nos proporciona otras caracterizaciones para las relaciones, reflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas.

TEOREMA 6.5 Sea R una relación en X. Entonces

1. R es reflexiva $\Leftrightarrow I_X \subset R$
2. R es simétrica $\Leftrightarrow R = R^{-1}$
3. R es antisimétrica $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subset I_X$
4. R es transitiva $\Leftrightarrow R \circ R \subset R$

Demostración

Ver el problema resuelto 3.

EJEMPLO 7 Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y R la relación $R = \{(1, 2)\}$. Probar que

a. R es antisimétrica **b.** R es transitiva

Solución.

a. Tenemos que $R^{-1} = \{(2, 1)\}$ y $R \cap R^{-1} = \varnothing \subset I_X$.
Luego, por la parte (3) del teorema anterior, concluimos que R es antisimétrica.

b. Tenemos que $R \circ R = \varnothing \subset R$
Luego, por la parte (4) del teorema anterior, concluimos que R es transitiva.

PROBLEMAS RESUELTOS 6.3

PROBLEMA 1 En $X = \{a, b, c\}$ definir cuatro relaciones, R_1, R_2, R_3, y R_4, tal que:

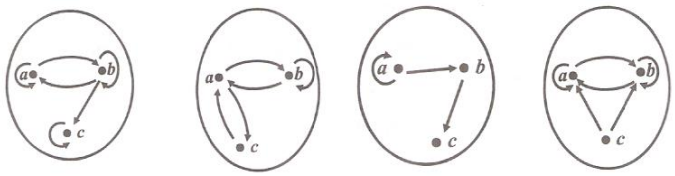
a. R_1 sea reflexiva y no sea simétrica, antisimétrica ni transitiva.

b. R_2 sea simétrica y no sea reflexiva, antisimétrica ni transitiva.

c. R_3 sea antisimétrica y no se reflexiva, simétrica ni transitiva.

d. R_4 sea transitiva y no sea simétrica, reflexiva ni antisimétrica.

Solución



R_1 R_2 R_3 R_4

PROBLEMA 2. **a.** Determinar las condiciones que debe satisfacer la matriz de una relación

i. Reflexiva. **ii.** Simétrica.

b. Las siguientes matrices corresponden a las relaciones S_1, S_2 y S_3. Aplicar las condiciones anteriores para determinar la reflexividad y simetría de estas relaciones.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

Se llama **diagonal principal** de una matriz a la diagonal que baja de izquierda a derecha.

Una matriz cuadrada $M = [a_{ij}]_{nxn}$ es **simétrica** si $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall$ **i** y $\forall$ **j**.

a. Los siguientes resultados se obtienen directamente de la definición de relación reflexiva y de relación simétrica, respectivamente.

i. Una relación es reflexiva si y sólo si toda entrada de la diagonal principal de su matriz es igual a 1.

ii. Una relación es simétrica sí y sólo si su matriz es una matríz simétrica.

b. De acuerdo a estos dos criterios tenemos que:

i. S_1 es reflexiva y no es simétrica.

ii. S_2 es simétrica y no reflexiva

iii. S_3 es reflexiva y simétrica.

PROBLEMA 3 Demostrar el teorema 6.5.

Sea R una relación en X. Entonces

1. R es reflexiva $\Leftrightarrow I_X \subset R$
2. R es simétrica $\Leftrightarrow R = R^{-1}$
3. R es antisimétrica $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subset I_X$
4. R es transitiva $\Leftrightarrow R \circ R \subset R$

Solución

1. $(\Rightarrow)$ Obvio.

$(\Leftarrow)$ $x \in X \Rightarrow (x, x) \in I_X \Rightarrow (x, x) \in R \Rightarrow x\,R\,x$

2. $(\Rightarrow)$ $(x, y) \in R \Leftrightarrow x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$ (R es simétrica)

$\Leftrightarrow x\,R^{-1}\,y \Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1}$

Luego, $R = R^{-1}$.

$(\Leftarrow)$ $x\,R\,y \Leftrightarrow (x, y) \in R \Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1}$ $(R = R^{-1})$

$\Leftrightarrow x\,R^{-1}\,y \Leftrightarrow y\,R\,x.$

Luego, R es simétrica.

3. $(\Rightarrow)$ $(x, y) \in R \cap R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow x\,R\,y \wedge x\,R^{-1}\,y$

$\Leftrightarrow x\,R\,y \wedge y\,R\,x \Rightarrow x = y$ (R es antisimétrica)

$\Rightarrow (x, y) \in I_X$

Luego, $R \cap R^{-1} \subset I_X$

$(\Leftarrow)$ $x\,R\,y \wedge y\,R\,x \Leftrightarrow x\,R\,y \wedge x\,R^{-1}\,y \Leftrightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in R^{-1}$

$\Leftrightarrow (x, y) \in R \cap R^{-1} \Rightarrow (x, y) \in I_X$ $(R \cap R^{-1} \subset I_X)$

$\Rightarrow x = y.$

Luego, R es antisimétrica.

4. $(\Rightarrow)$ $(x, z) \in (R \circ R) \Leftrightarrow x\,(R \circ R)\,z \Leftrightarrow \exists\, y \in X \,/\, x\,R\,y \wedge y\,R\,z$

$\Rightarrow x\,R\,z$ (R es transitiva)

$\Leftrightarrow (x, z) \in R.$

Luego, $R \circ R \subset R$.

$(\Leftarrow)$ $x\,R\,y \wedge y\,R\,z \Rightarrow x\,(R \circ R)\,z$ (Def. de composición)

$\Leftrightarrow (x, z) \in (R \circ R) \Rightarrow (x, z) \in R$ $(R \circ R \subset R)$

$\Leftrightarrow x\,R\,z$

Luego, R es transitiva.

PROBLEMAS PROPUESTOS 6.3

1. Cada una de las siguientes relaciones es una relación en $\mathbb{Z}$, el conjunto de números enteros.

a. ¿Cuáles son reflexivas? **b.** ¿Cuáles son simétricas?

c. ¿Cuáles son antisimétricas? **d.** ¿Cuáles son transitivas?

i. $x\,R_1\,y \Leftrightarrow x+y<3$ **ii.** $x\,R_2\,y \Leftrightarrow y=2$

iii. $x\,R_3\,y \Leftrightarrow x+y=1$ **iv.** $x\,R_4\,y \Leftrightarrow x$ divide a y

v. $x\,R_5\,y \Leftrightarrow x^2+x=y^2+y$ **vi.** $x\,R_6\,y \Leftrightarrow x$ e y son primos entre sí

vii. $x\,R_7\,y \Leftrightarrow 3$ divide a $(x+y)$ **viii.** $x\,R_8\,y \Leftrightarrow |x|=|y|$

ix. $x\,R_9\,y \Leftrightarrow x<y$.

2. De las siguientes relaciones en $X=\{1,2,3\}$

a. ¿Cuáles son reflexivas? **b.** ¿Cuáles son simétricas?

c. ¿Cuáles son antisimétricas? **d.** ¿Cuáles son transitivas?

i. $R_1=\varnothing$ **ii.** $R_2=X\times X$

iii. $R_3=\{(1,1)\}$ **iv.** $R_4=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

v. $R_5=\{(1,1),(2,1)\,(2,2),(3,2),(2,3)\}$

3. Las siguientes matrices corresponden a las relaciones R_1, R_2, R_3 y R_4, respectivamente.

a. ¿Cuáles son reflexivas? **b.** ¿Cuáles son simétricas?.

c. ¿Cuáles son antisimétricas?

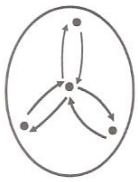
$$M_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\quad M_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad M_3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\quad M_4=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

4. De las siguientes relaciones

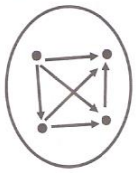
a. ¿Cuáles con reflexivas? **b.** ¿Cuáles son simétricas?

c. ¿Cuáles con antisimétricas? **d.** ¿Cuáles son transitivas?

R_1



R_2



R_3

R_4

5. Sean R y S relaciones en $X = \{ 2, 3, 4, 6 \}$ definidas por:

i. $x\,R\,y \Leftrightarrow x < y$ **ii.** $x\,S\,y \Leftrightarrow x$ divide a y

Hallar: **a.** $R \cup S$ **b.** $R \cap S$ **c.** $R - S$

6. Hallar una relación R en $X = \{ 1, 2, 3 \}$ tal que:

a. R sea reflexiva y simétrica y no sea antisimétrica ni transitiva.

b. R sea reflexiva y antisimétrica y no sea simétrica ni transitiva.

c. R sea reflexiva y transitiva y no sea simétrica ni antisimétrica.

d. R sea simétrica, antisimétrica y transitiva y no sea reflexiva.

e. R sea simétrica y transitiva y no sea reflexiva ni antsimétrica.

f. R sea antisimétrica y transitiva y no sea reflexiva ni simétrica.

g. R sea reflexiva, simétrica y antisimétrica y transitiva.

7. Sea R una relación en X. Probar que:

a. R es reflexiva $\Leftrightarrow$ R^{-1} es reflexiva

b. R es simétrica $\Leftrightarrow$ R^{-1} es simétrica

c. R es antisimétrica $\Leftrightarrow$ R^{-1} es antisimétrica

d. R es transitiva $\Leftrightarrow$ R^{-1} es transitiva

8. Si R y S son relaciones en X, probar que:

a. R y S son reflexivas $\Rightarrow$ $R \cap S$ y $R \cup S$ son reflexivas

b. R y S son simétricas $\Rightarrow$ $R \cap S$ y $R \cup S$ son simétricas

c. R y S son antisimétricas $\Rightarrow$ $R \cap S$ es antisimétrica

d. R y S son transitivas $\Rightarrow$ $R \cap S$ es transitiva.

9. Sea R una relación en X que es reflexiva. Probar que para cualquier otra relación S en X se cumple que:

a. $S \subset R \circ S$ **b.** $S \subset S \circ R$

10. Sean R y S dos relaciones en X. Si R es reflexiva y S es reflexiva y transitiva,

probar que: $R \subset S \Leftrightarrow R \circ S = S$

11. Si R es cualquier relación en X, probar que las relaciones siguientes son simétricas.

a. $R \cup R^{-1}$ **b.** $R \cap R^{-1}$

SECCION 6.4
RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Las relaciones de equivalencia nos permitirán construir nuevos objetos matemáticos a partir de otros conocidos. Así, nos permite construir los números enteros a partir de los números naturales. Las relaciones de equivalencia generalizan la relación de igualdad.

DEFINICION Una **relación de equivalencia** es una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Es costumbre generalizada usar el símbolo $\sim$ para representar a una relación de equivalencia. Así, la expresión

$$a \sim b$$

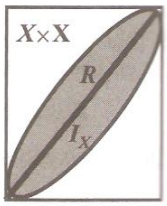
significa que ***a* está relacionada con *b***. En este caso, se acostumbra decir que **"*a* es equivalente a *b*".**

Con esta nueva notación reformulamos la definición de relación de equivalencia. Una relación de equivalencia en un conjunto X es una relación $\sim$ tal que:

1. $\sim$ es **reflexiva:** $\forall\, x \in X,\ x \sim x$
2. $\sim$ es **simétrica:** $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
3. $\sim$ es **transitiva:** $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

EJEMPLO 1 En cualquier conjunto X, la relación diagonal I_X es una relación de equivalente. Recordar que I_X no es otra cosa que la relación de igualdd en X, la cual, evidentemente, es reflexiva, simétrica y transitiva.

0tra relación de equivalencia en X es todo el producto cartesiano $X \times X$.



Entre todas las relaciones de equivalencia en X, I_X es la más pequeña (la más flaca) y $X \times X$ es la más grande (la más gorda). Es decir, si R es cualquier relación de equivalencia en X entonces,

$$I_X \subset R \subset X \times X$$

EJEMPLO 2 La relación de paralelismo definida en el conjunto de las rectas del plano es una relación de equivalencia.

EJEMPLO 3 Sea $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Verificar que la siguiente relación en X es una relación de equivalencia

$$x \sim y \Leftrightarrow x^2 = y^2$$

Solución

1. Reflexividad: Tenemos que $x^2 = x^2$, $\forall x \in X$. Luego, $\forall x \in X$, $x \sim x$
2. Simetría: $x \sim y \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y \sim x$
3. Transitividad: $x \sim y \wedge y \sim z \Leftrightarrow x^2 = y^2 \wedge y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2 \Rightarrow x \sim z$

EJEMPLO 4 Sea $\boldsymbol{F}$ el conjunto de las formas proposionales. La equivalencia lógica, "$\equiv$", es una relación de equivalencia en $\boldsymbol{F}$.

En efecto, sabemos que:

1. $A \equiv A, \forall A \in \boldsymbol{F}$, **2.** $A \equiv B \Rightarrow B \equiv A$, **3.** $A \equiv B \wedge B \equiv C \Rightarrow A \equiv C$

EJEMPLO 5 **Relación de Congruencia Módulo *n*.**

Sea n un entero positivo fijo. En $\mathbb{Z}$ definimos la siguiente relación llamada la **relación de congruencia módulo *n*.**

$x \sim y \Leftrightarrow n$ divide a $x - y$. O bien,

$x \sim y \Leftrightarrow x - y = kn$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Probar que esta relación es una relación de equivalencia.

Solución

1. Reflexividad: $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0 = 0 \times n$. Luego, $x \sim x \ \forall x \in \mathbb{Z}$
2. Simetría: $x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x - y = kn \Leftrightarrow \exists (-k) \in \mathbb{Z} \ / \ y - x = (-k)n$.
3. Transitividad: $x \sim y \wedge y \sim z \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} \ / \ x - y = k_1 n \wedge \exists k_2 \in \mathbb{Z} \ / \ y - z = k_2 n$

$$\Rightarrow x - z = (k_1 + k_2)n, \ (k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow x \sim z.$$

EJEMPLO 6 En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos la relación

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

Probar que esta relación es una relación de equivalencia.

Solución

1. Reflexividad: $\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se cumple $a + b = b + a$. Luego,

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (a, b) \sim (a, b).$$

2. Simetría: $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow c + b = d + a$
$\Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$

3. Transitividad:

$$(a, b) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (m, n) \Leftrightarrow a + d = b + c \wedge c + n = d + m$$

$$\Leftrightarrow (a + d) + n = (b + c) + n \wedge b + (c + n) = b + (d + m)$$

$$\Rightarrow (a + d) + n = b + (d + m) \Rightarrow a + n = b + m$$

$$\Leftrightarrow (a, b) \sim (m, n)$$

La relación de equivalencia y la partición de un conjunto son dos conceptos que están íntimamente conectados. En lo que sigue establecemos esta interconexión.

DEFINICION Sea X un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Si $a \in X$, llamaremos **clase de equivalencia del elemento *a*** al siguiente subconjunto de X:

$$[a] = \{ x \in X / x \sim a \}$$

En otros términos, $[a]$, la clase de equivalencia de a, es el conjunto formado por todos los elementos de X que son equivalentes con a.

EJEMPLO 7 Consideramos la relación de equivalencia del ejemplo 3 definida en el conjunto $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x^2 = y^2$$

Hallar la clase de equivalencia de cada uno de los elementos de X.

Solución

1. La clase de 0: $x \in [0] \Leftrightarrow x \sim 0 \Leftrightarrow x^2 = 0^2 \Leftrightarrow x = 0$.

Luego, $[0] = \{ 0 \}$

2. La clase de 1: $x \in [1] \Leftrightarrow x \sim 1 \Leftrightarrow x^2 = 1^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Luego, $[1] = \{ -1, 1 \}$

3. La clase de 2: $x \in [2] \Leftrightarrow x \sim 2 \Leftrightarrow x^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Luego, $[2] = \{ -2, 2 \}$

4. La clase de 3: $x \in [3] \Leftrightarrow x \sim 3 \Leftrightarrow x^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Luego, $[3] = \{ 3 \}$. No consideramos a -3 porque -3 no está en el conjunto X.

5. La clase de -1: $x \in [-1] \Leftrightarrow x \sim -1 \Leftrightarrow x^2 = (-1)^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
Luego, $[-1] = \{ -1, 1 \} = [1]$

6. La clase de -2: $x \in [-2] \Leftrightarrow x \sim -2 \Leftrightarrow x^2 = (-2)^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$
Luego, $[-2] = \{ -2, 2 \} = [2]$

En resumen. Sólo tenemos 4 clases de equivalencia:

$$[0] = \{ 0 \},\ [1] = [-1] = \{ -1, 1 \},\ [2] = [-2] = \{ 2, 2 \} \text{ y } [3] = \{ 3 \}$$

En el ejemplo anterior vimos que -1 y 1 son equivalentes y que ambos tienen la misma clase de equivalencia. El siguiente teorema nos dice que este resultado no es casual.

TEOREMA 6.5 Si $\sim$ es una relación de equivalencia en X, entonces

$$a \sim b \Leftrightarrow [a] = [b]$$

Demostración

($\Rightarrow$) $x \in [a] \Leftrightarrow x \sim a \Leftrightarrow x \sim b$ ($a \sim b$ y transitividad)
$\Leftrightarrow x \in [b]$.

Luego, $[a] = [b]$

($\Leftarrow$) $a \in [a] \Rightarrow a \in [b]$ ($[a] = [b]$)
$\Rightarrow a \sim b$

EJEMPLO 8 Consideremos la relación de **congruencia módulo 3** definida en $\mathbb{Z}$ (ejemplo 5, cuando $n = 3$). Esto es,

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \ /\ x - y = 3k.$$

Hallar todas las clases de equivalencia de esta relación.

Solución

1. Clase de $[0]$: $x \in [0] \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \ /\ x - 0 = 3k \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \ /\ x = 3k$.

Luego, $[0] = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$

2. Clase de $[1]$: $x \in [1] \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \ /\ x - 1 = 3k \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \ /\ x = 3k + 1$.

Luego, $[1] = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$

3. Clase de $[2]$: $x \in [2] \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \ /\ x - 2 = 3k \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \ /\ x = 3k + 2$.

Luego, $[2] = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$

Estas son todas las clases. En efecto, cualquier entero m, al dividirlo entre 3, deja como residuo 0, 1 ó 2. Esto nos dice que $m \sim 0$, $m \sim 1$ ó $m \sim 2$. Luego, por el teorema anterior,

$$[m] = [0], \qquad [m] = [1] \quad \text{ó} \qquad [m] = [2]$$

DEFINICION Sea $\sim$ una relación de equivalencia en X. Se llama **conjunto cociente de X por $\sim$** al conjunto:

$$\frac{X}{\sim} = \{ [x] \ / \ x \in X \}$$

Esto es, el **conjunto cociente** es el conjunto formado por todas las clases de equivalencia.

EJEMPLO 9 El conjunto cociente de la relación de equivalencia del ejemplo 3 es:

$$\frac{X}{\sim} = \{ [0], [1], [2], [3] \} = \{ \{0\}, \{-1,1\}, \{-2, 2\}, \{3\} \}$$

EJEMPLO 10 El conjunto cociente de la relación de congruencia módulo 3, ejemplo 8, es de mucha importancia. Este conjunto tiene su nombre propio: **Los enteros módulo 3** y se le denota por $\mathbb{Z}_3$. Esto es,

$$\mathbb{Z}_3 = \{ [0], [1], [2] \}$$

CONSTRUCCION DE LOS ENTEROS

En el capítulo anterior vimos que Peano logró construir toda la teoría de los números naturales a partir de 5 axiomas, los **axiomas de Peano**. Ya contando con los naturales, se puede construir todo el edificio de la matemática. El siguiente ejemplo nos muestra como se obtienen los números enteros a partir de los números naturales.

EJEMPLO 11 **Construcción de los Enteros.**

Consideremos la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dada en el ejemplo 6. Esto es,

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$$

Calculemos las clases de equivalencia de esta relación.

1. La clase de (0, 0):

$$(m, k) \in [(0, 0)] \iff (m, k) \sim (0, 0) \iff m + 0 = k + 0 \iff m = k.$$

Luego, $[(0, 0)] = \{ (0, 0), (1,1), (2, 2), (3, 3), \ldots, (k, k), \ldots \}$

A esta clase la denotaremos por **0**. Esto es,

$$\mathbf{0} = [(0, 0)]$$

2. La clase de $(1, 0)$:

$$(m, k) \in [(1, 0)] \Leftrightarrow (m, k) \sim (1, 0) \Leftrightarrow m + 0 = k + 1 \Leftrightarrow m = k + 1$$

Luego, $[(1, 0)] = \{ (1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), \ldots, (k + 1, k), \ldots \}$

A esta clase la denotaremos por $+1$. Esto es,

$$\mathbf{+1} = [(1, 0)]$$

3. La clase de $(n, 0)$, donde n es un natural cualquiera:

$$(m, k) \in [(n, 0)] \Leftrightarrow (m, k) \sim (n, 0) \Leftrightarrow m + 0 = k + n \Leftrightarrow m = k + n.$$

Luego, $[(n, 0)] = \{ (n, 0), (n + 1, 1), (n + 2, 2), \ldots, (n + k, k), \ldots \}$

A esta clase la denotaremos por $+n$. Esto es,

$$\mathbf{+n} = [(n, 0)]$$

4. La clase de $(0, 1)$:

$$(m, k) \in [(0, 1)] \Leftrightarrow (m, k) \sim (0, 1) \Leftrightarrow m + 1 = k + 0 \Leftrightarrow m + 1 = k$$

Luego, $[(0, 1)] = \{ (0, 1), (1, 2), (2, 3), \ldots, (m, m + 1), \ldots \}$

A esta clase la denotaremos por -1. Esto es,

$$\mathbf{-1} = [(0, 1)]$$

5. La clase de $(0, n)$, donde n es un natural cualquiera:

$$(m, k) \in [(0, n)] \Leftrightarrow (m, k) \sim (0, n) \Leftrightarrow m + n = k + 0 \Leftrightarrow m + n = k.$$

Luego, $[(0, n)] = \{ (0, n), (1, n + 1), (2, n + 2), \ldots, (n, m + n), \ldots \}$

A esta clase la denotaremos por $-n$. Esto es,

$$\mathbf{-n} = [(0, n)]$$

6. La clase (a, b), donde a y b son dos naturales cualesquiera:

Si $a \geq b$, tomamos $n = a - b$ y tenemos que $(a, b) \sim (n, 0)$.
Luego, en este caso,

$$[(a, b)] = [(n, 0)] = +n.$$

Si $a \leq b$, tomamos $n = b - a$ y tenemos que $(a, b) \sim (0, n)$.
Luego, en este caso,

$$[(a, b)] = [(n, 0)] = -n.$$

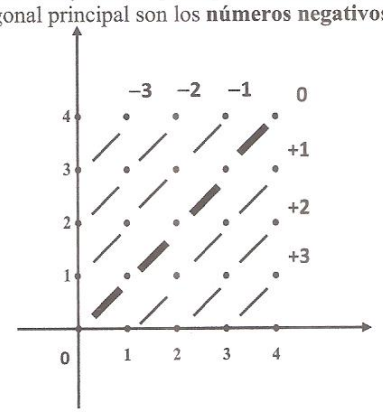
En resumen, el conjunto cociente de la relación es

$$\frac{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}{\sim} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots \}$$

Este conjunto cociente es el conjunto de números enteros, al que se denota por $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}{\sim} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots \}$$

El siguiente diagrama nos muestra geométricamente estas clases de equivalencia. Los que pares que están en una diagonal conforman una clase de equivalencia o sea un número entero. La diagonal principal (la remarcada) es clase que corresponde al entero **0**. Las diagonales debajo de la principal son los **números positivos** y las diagonales sobre la diagonal principal son los **números negativos**.



CONSTRUCCION DE LOS RACIONALES

Ya construidos los enteros, veamos como, a partir de éstos, obtenemos los números racíonales. Lo hacemos en el síguiente ejemplo.

EJEMPLO 12 **Construcción de los Racionales.**

Sea $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{ 0 \}$. En el producto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definimos la relación

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Esta relación es de equivalencia. En efecto:

1. *Reflexividad*: $\forall\, (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $(a, b) \sim (a, b)$, ya que $ab = ba$
2. *Simetría*: $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$
3. *Transitividad*:

$$\begin{aligned}
(a, b) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (m, n) &\Leftrightarrow ad = bc \wedge cn = dm \\
&\Rightarrow (ad)n = (bc)n \wedge (cn)b = (dm)b \\
&\Rightarrow (an)d = bcn \wedge bcn = (bm)d \\
&\Rightarrow (an)d = (bm)d \Rightarrow an = bm \qquad (d \neq 0) \\
&\Rightarrow (a, b) \sim (m, n).
\end{aligned}$$

El conjunto cociente $\dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*}{\sim}$ es el conjunto de los **números racionales**, al que se denota por $\mathbb{Q}$. Esto es, $\mathbb{Q} = \dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*}{\sim}$

Según esta construcción, un número racional es una clase de equivalencia de pares de números enteros cuya segunda componente es distinta de 0. Así, la clase de equivalencia de (1, 2) es

$$[(1, 2)] = \{\ldots, (\pm 1, \pm 2), (\pm 2, \pm 4), (\pm 3, \pm 6), \ldots\}$$

Observar que $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pm 1}{\pm 2} = \dfrac{\pm 2}{\pm 4} = \dfrac{\pm 3}{\pm 6} = . = . = .$

Por esta razón, a esta clase la podemos denotar por $\dfrac{1}{2}$.

TEOREMA 6.6 Si $\sim$ es una relación de equivalencia en X, entonces la familia de las clases de equivalencia, o sea el conjunto cociente,

$$\frac{X}{\sim} = \{\, [x] \,\}_{x \in X},$$

es una partición del conjunto X.

Demostración

1. $[x] \neq \varnothing,\ \forall\, x \in X.$

En efecto, como $x \sim x$, entonces $x \in [x]$ y, por lo tanto, $[x] \neq \varnothing$

2. $[x] \cap [y] = \varnothing$ si $[x] \neq [y]$

Probemos el contrarrecíproco: $[x] \cap [y] \neq \varnothing \Rightarrow [x] = [y]$

$$\begin{aligned}
[x] \cap [y] \neq \varnothing &\Rightarrow \exists z \ /\ z \in [x] \cap [y] \\
&\Rightarrow z \sim x \ \wedge\ z \sim y \\
&\Rightarrow x \sim z \ \wedge\ z \sim y && \text{(Simetría)} \\
&\Rightarrow x \sim y && \text{(Transitividad)} \\
&\Rightarrow [x] = [y] && \text{(Teorema 6. 5)}
\end{aligned}$$

3. $X = \bigcup_{x \in X} [x]$

Como $[x] \subset X,\ \forall x$, tenemos que $\bigcup_{x \in X} [x] \subset X$ **(i)**

Por otro lado, $z \in X \Rightarrow z \in [z] \Rightarrow z \in \bigcup_{x \in X} [x] \Rightarrow X \subset \bigcup_{x \in X} [x]$ **(ii)**

De **(i)** y **(ii)** obtenemos la igualdad deseada.

El recíproco de este teorema también se cumple.

TEOREMA 6.7 Sea $\{ A_i \}_{i \in I}$ una partición de X y sea $\sim$ la siguiente relación en X

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists\, i \in I \text{ tal que } x \in A_i \ \wedge\ y \in A_i$$

La $\sim$ es una relación de equivalencia en X, cuyo conjunto cociente es, precisamente, la partición $\{ A_i \}_{i \in I}$. Es decir,

$$\frac{X}{\sim} = \{ A_i \}_{i \in I}$$

Demostración

1. $\sim$ es reflexiva: $\forall x \in X \Rightarrow \exists\, i \in I \ / \ x \in A_i \Rightarrow x \in A_i \wedge x \in A_i \Rightarrow x \sim x$

2. $\sim$ es simétrica:
$x \sim y \Rightarrow \exists\, i \in I \ / \ x \in A_i \ \wedge\ y \in A_i \ \Rightarrow\ y \in A_i \ \wedge\ x \in A_i \Rightarrow y \sim x$

3. $\sim$ es transitiva:

$$\begin{aligned} x \sim y \ \wedge\ y \sim z &\Leftrightarrow (\exists\, i \in I \ / x \in A_i \wedge y \in A_i) \wedge (\exists\, j \in I \ / \ y \in A_j \ \wedge\ z \in A_j) \\ &\Rightarrow y \in A_i \cap A_j \\ &\Rightarrow A_i = A_j \qquad\qquad (A_i \cap A_j) \neq \varnothing. \\ &\Rightarrow x \in A_i \ \wedge\ z \in A_i \\ &\Rightarrow x \sim z \end{aligned}$$

Por último, cada conjunto A_i es una clase de equivalencia de la relación $\sim$. En efecto, si $x \in A_i$, entonces $A_i = [x]$, ya que: $y \in A_i \Leftrightarrow y \sim x \Leftrightarrow y \in [x]$

A la relación $\sim$ definida en este teorema se le llama **relación de equivalencia correspondiente a la partición** $\{ A_i \}_{i \in I}$.

PROBLEMAS RESUELTOS 6.4

PROBLEMA 1 Hallar todas las relaciones de equivalencia que se pueden definir en el conjunto $X = \{ 0, 1, 2 \}$

Solución

En primer lugar, hallamos todas las posibles particiones de X. Luego hallamos las relaciones de equivalencia correspondientes a estas particiones.

Las particiones de $X = \{ 0, 1, 2 \}$ son:

- la siguiente relación en X

$A_i \ \wedge \ y \in A_i$

X, cuyo conjunto cociente
s decir,

$\wedge \ x \in A_i \Rightarrow x \sim x$

$x \in A_i \Rightarrow y \sim x$

$\exists j \in I \,/\, y \in A_j \ \wedge \ z \in A_j)$

$(A_i \cap A_j) \neq \varnothing.$

a de la relación $\sim$. En
$\Leftrightarrow y \in [x]$

lación de equivalencia

6.4

a que se pueden definir

X. Luego hallamos las

a. $\{ \{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ **b.** $\{ \{0,1\}, \{2\}\}$ **c.** $\{ \{0, 2\}, \{1\}\}$

d. $\{ \{1,2\}, \{0\}\}$ **e.** $\{ \{0, 1, 2\}\}$

La relación de equivalencia correspondiente a cada una de estas particiones son:

a. I_X **b.** $I_X \cup \{ (0,1), (1,0) \}$ **c.** $I_X \cup \{ (0,2), (2,0) \}$

d. $I_X \cup \{ (1, 2), (2,1) \}$ **e.** $X \times X$.

PROBLEMA 2. Si R y S son relaciones de equivalencia en X, probar que:

$$S \circ R \text{ es de equivalencia} \Leftrightarrow S \circ R = R \circ S$$

Solución

$(\Rightarrow)$

$S \circ R$ de equivalencia $\Rightarrow S \circ R$ es simétrica

$$\Rightarrow (S \circ R) = (S \circ R)^{-1} \qquad \text{(Teorema 6.5 parte 2)}$$

$$= R^{-1} \circ S^{-1} \qquad \text{(Teorema 6.4)}$$

$$= R \circ S \qquad (R \text{ y } S \text{ simétricas})$$

$(\Leftarrow)$

1. $S \circ R$ es reflexiva. En efecto:

Sea $x \in X$

R y S son reflexivas $\Rightarrow x\,R\,x \ \wedge \ x\,S\,x \Rightarrow x(S \circ R)x \Rightarrow S \circ R$ es reflexiva.

2. $S \circ R$ es simétrica. En efecto:

$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1} = R \circ S = S \circ R$ (R y S simétricas e hipótesis)

Luego, $S \circ R$ es simétrica (Teorema 6.5 parte 2)

3. $S \circ R$ es trasitiva:

R y S son transitivas $\Rightarrow R \circ R \subset R$ y $S \circ S \subset S$ (Teorema 6.5. parte 4)

Ahora,

$(S \circ R) \circ (S \circ R) = S \circ (R \circ S) \circ R = S \circ (S \circ R) \circ R$ (Hipótesis)

$= (S \circ S) \circ (R \circ R) \subset S \circ R$

Luego, de acuerdo al teorema 6.5 parte 4, $S \circ R$ es transitiva

---

PROBLEMAS PROPUESTOS 6.4

1. **a.** Probar que la siguiente relación en $\mathbb{R}^2$ es de equivalencia.

$$(a, b) \sim (c, d) \iff \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2}\ .$$

b. Hallar la partición correspondiente y describir geométricamente cada clase de equivalencia.

2. **a.** Probar que la siguiente relación en $\mathbb{R}^2$ es de equivalencia.

$$(a, b) \sim (c, d) \iff b - a = d - c$$

b. Hallar la partición correspondiente y describir geométricamente cada clase de equivalencia.

3. **a.** Probar que la siguiente relación en $\mathbb{R}^2$ es de equivalencia.

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + b = c + d$$

b. Hallar la partición correspondiente y describir geométricamente las clases de equivalencia.

4. **a.** Probar que la siguiente relación en $\mathbb{R}$ es de equivalencia.

$$a \sim b \iff (a - b) \in \mathbb{Z}$$

b. Hallar la partición correspondiente y describir las clases de equivalencia.

5. Hallar las clases de equivalencia de la relación de congruencia módulo 5.

6. Sea X un conjunto no vacío y B un subconjunto fijo de X. En $\wp(X)$ tenemos la siguiente relación:

$$A_1 \sim A_2 \iff A_1 \cap B = A_2 \cap B$$

a. Probar que esta relación es de equivalencia.

b. Probar que $A_1 \sim A_2 \iff (A_1 \triangle A_2) \cap B = \varnothing$

c. ¿Quién es $\sim$ si $B = \varnothing$?

d. ¿Quién es $\sim$ si $B = X$?

7. Sea $X = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$.

a. Probar que la siguiente relación en X es una relación de equivalencia.

$$a \sim b \iff 7 \text{ divide a } (a^2 - b^2)$$

b. Hallar todas las clases de equivalencia.

8. **a.** Probar que la siguiente relación en $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ es de equivalencia.

$$(a, b, c) \sim (k, m, n) \iff \exists r \in \mathbb{R}^* \ / \ (a, b, c) = r(k, m, n)$$

b. Describir la clase $[(a, b, c)]$

9. Sea $X = \{ 0, 1, 2, 3 \}$. La familia $\{\{0\}, \{1,2\}, \{3\}\}$ es una partición de X. Hallar la relación de equivalencia correspondiente a esta partición.

10. Hallar todas las relaciones de equivalencia que se pueden definir en el conjunto

$$X = \{ a, b \}$$

11. Hallar todas las relaciones de equivalencia que se pueden definir en el conjunto

$$X = \{ k, m, n \}$$

12. Sea R una relación en X. Probar que

$$R \text{ es de equivalencia } \Leftrightarrow R^{-1} \text{ es de equivalencia.}$$

13. Sean R y S relaciones de equivalencia en X. Probar que $R \cap S$ es una relación de equivalencia.

14. Si $\{ R_i \}_{i \in I}$ es una familia de relaciones de equivalencia, probar que $\bigcap_{i \in I} R_i$ es una relación de equivalencia.

15. Una relación circular es una relación R tal que

$$a R b \ \wedge \ b R c \ \Rightarrow \ c R a$$

Probar que una relación R es de equivalencia si y sólo si R es reflexiva y circular.

16. Sea R una relación en X. Probar que

$$R \text{ es de equivalencia } \Rightarrow R \circ R = R$$

17. Sean R y S dos relaciones de equivalencia en X. Probar que:

$$R \cup S \text{ es de equivalencia } \Leftrightarrow R \circ S \subset R \cup S \ \wedge \ S \circ R \subset R \cup S$$

18. ¿Qué condición debe cumplir X para que el vacío $\varnothing$ sea una relación de equivalencia en X?.

SECCION 6.5
RELACIONES DE ORDEN

Las relaciones de orden son generalización de la relación de inclusión y de la relación "menor o igual" en los números reales.

DEFINICION Una **relación de orden** es una relación que es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

Se usa el símbolo $\prec$ para representar a una relación de orden.

Con esta notación, la expresión $x \prec y$ se lee "**x es anterior a y**", "**x precede a y**", "**y es posterior a x**", "**y sigue a x**".

Reformulamos la definición de relación de orden usando la notación $\prec$.

DEFINICION Una **relación de orden** en un conjunto X es una relación $\prec$ tal que,

1. $\prec$ **es reflexiva:** $\forall x \in X,\ x \prec x$
2. $\prec$ **es antisimétrica:** $x \prec y \wedge y \prec x \Rightarrow x = y$
3. $\prec$ **es transitiva:** $x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z$

Un conjunto ordenado es un par $(X, \prec)$, donde X es un conjunto y $\prec$ es una relación de orden en X.

Cuando se tiene un conjunto ordenado $(X, \prec)$ se dice que X está ordenado por $\prec$, o sea que $\prec$ ordena a X.

EJEMPLO 1 La relación $\leq$ en $\mathbb{R}$ es una relación de orden. En este caso:

$$x \prec y \iff x \leq y$$

EJEMPLO 2 La relación de inclusión en $\wp(U)$ es una relación de orden. En este caso: $A \prec B \iff A \subset B$

EJEMPLO 3 La relación de divisibilidad en $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$:

$$n \prec m \iff n \text{ divide a } m$$

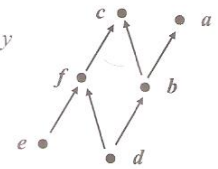
es una relación de orden de $\mathbb{N}^*$.

Observar que esta misma relación de divisibilidad en $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ no es una relación de orden, ya que este caso, la relación no es antisimétrica. En efecto:

$$2 \text{ divide a } (-2) \text{ y } (-2) \text{ divide a } 2, \text{ pero, } 2 \neq -2$$

EJEMPLO 4 Mediante el siguiente diagrama definimos una relación de orden en $X = \{a, b, c, d, e, f\}$:

$x \prec y \iff x = y$ o de x se puede ascender hasta y en diagrama.



Es fácil verificar que, efectivamente, esta relación es de orden.

DIAGRAMA DE HASSE

Los conjuntos ordenados finitos pueden representarse gráficamente y en forma simple mediante los llamados **diagramas de Hasse**. El diagrama del ejemplo anterior es un diagrama de Hasse.

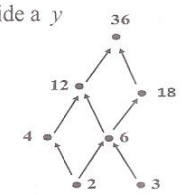
DEFINICION Sea $(X, \prec)$ un conjunto ordenado. Dados a y b, dos elementos distintos de X, diremos que ***b* es consecutivo de *a*** si se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$\textbf{1.}\ a \prec b \quad \text{y} \quad \textbf{2.}\ a \prec x \prec b \Rightarrow a = x \ \vee \ x = b.$$

Sea $(X, \prec)$ un conjunto ordenado finito. **El diagrama de Hasse** de $(X, \prec)$ se construye representando cada elemento de X mediante un punto. Si el elemento y es consecutivo de x, se traza una flecha con punto inicial x y punto final y. Los puntos que representan a los elementos de X deben estar dispuestos en tal forma que el punto que corresponda a un elemento que es consecutivo a otro, quede encima del que corresponde a éste otro.

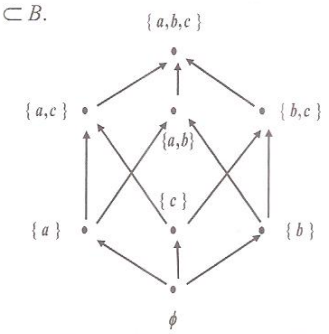
EJEMPLO 5 El esquema adjunto es el **diagrama de Hasse** de la siguiente relación de orden definida en $X = \{2, 3, 4, 6, 12, 18, 36\}$

$x \prec y \iff x$ divide a y



EJEMPLO 6 Sea el conjunto $X = \{a, b, c\}$. El esquema siguiente es el **diagrama de Hasse** de la relación de inclusión en $\wp(X)$:

$A \prec B \iff A \subset B.$



Observar que el diagrama de Hasse simplifica el diagrama sagital de la relación. En efecto, en el diagrama de Hasse no aparecen los lazos que dan la reflexividad y las flechas que proporcionan la transitividad.

¿SABIAS QUE . . .

HELMUT HASSE (1.898-1.979). *Nació en Kassel, Alemania. Estudió matemáticas en la Universidad de Göttingen (1.918) y en la Universidad de Marburg (1.920). Hizo muchas contribuciones a la teoría algebraica de los números. En 1.934 fue nombrado director del famoso Instituto Matemático de Göttingen.*

Helmut Hasse

ORDEN PARCIAL Y ORDEN TOTAL

DEFINICION Sea $(X, \prec)$ un conjunto ordenado. Se dice que dos elementos x e y de X son **comparables** si se cumple que

$$x \prec y \ \vee \ y \prec x.$$

En caso contrario se dice que x e y son **incomparables**.

DEFINICION Una relación de orden $\prec$ en X es de **orden total** u **orden lineal**, si todo par de elementos de X son comparables. Esto es si,

$$(\forall x \in X)(\forall y \in X)(x \prec y \ \vee \ y \prec x)$$

Si existe al menos un par de elementos de X no comparables, entonces $\prec$ es un **orden parcial.**

Si $\prec$ es un orden total en X, entonces se dice que $(X, \prec)$, o simplemente X, es un conjunto **totalmente ordenado, linealmente ordenado** o una **cadena.** Similarmente, si $\prec$ es un orden parcial en X, $(X, \prec)$ es un conjunto **parcialmente ordenado**.

EJEMPLO 7 La relación de orden "$\leq$" en $\mathbb{R}$ es una relación de orden total. En efecto, tenemos que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \ x \leq y \vee y \leq x$$

EJEMPLO 8 Si $X = \{ a, b \}$, la relación de inclusión en $\wp(X)$ es una relación de orden parcial. En efecto, si $A = \{ a \}$ y $B = \{ b \}$, tenemos que A, B son dos elementos de $\wp(X)$ que no son comparables, es decir no se cumple que: $A \subset B \ \vee \ B \subset A$

EJEMPLO 9 Las relaciones dadas en los ejemplos 3 y 4 son de orden parcial.

PROBLEMAS RESUELTOS 6.5

PROBLEMA 1 Sea $X = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16 \}$ ordenado por

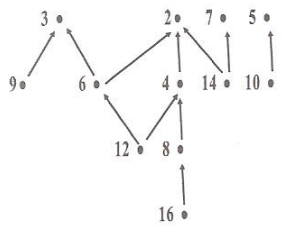
$$x \prec y \Leftrightarrow x \text{ es múltiplo de } y$$

a. Construir su diagrama de Hasse

b. Hallar una cadena de 4 elementos

Solución

a.



b. $C = \{ 16, 8, 4, 2 \}$.

PROBLEMA 2 Probar que la siguiente relación de $\mathbb{R}^2$ es de orden parcial

$$(a, b) \prec (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$$

Solución

1. *Reflexividad*: $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a, b) \prec (a, b)$, ya que $\forall a \in \mathbb{R},\ a \leq a \wedge \forall b \in \mathbb{R}, b \leq b$

2. *Antisimetría*: $(a, b) \prec (c, d) \wedge (c, d) \prec (a, b)$

$$\Leftrightarrow (a \leq c \wedge b \leq d) \wedge (c \leq a \wedge d \leq b)$$
$$\Rightarrow a = c \wedge b = d$$
$$\Rightarrow (a, b) = (c, d)$$

3. *Transitividad*: $(a, b) \prec (c, d) \wedge (c, d) \prec (m, n)$

$$\Leftrightarrow (a \leq c \wedge b \leq d) \wedge (c \leq m \wedge d \leq n)$$
$$\Rightarrow a \leq m \wedge b \leq n$$
$$\Rightarrow (a, b) \prec (m, n)$$

La relación es de orden parcial. En efecto, (3, 4) no es comparable con (2, 5).

PROBLEMA 3 Probar que la siguiente relación en $\wp(X)$ es una relación de orden.

$$A \prec B \Leftrightarrow A \cap B = B$$

Solución

1. Reflexividad: $\forall A,\ A \prec A,$ ya que $\forall A,\ A \cap A = A.$

2. Antisimetría: $A \prec B \wedge B \prec A \Leftrightarrow A \cap B = B \ \wedge\ B \cap A = A \ \Rightarrow\ A = B$

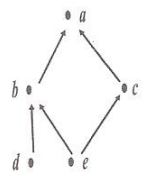
3. Transitividad: $A \prec B \wedge B \prec C \Leftrightarrow A \cap B = B \ \wedge\ B \cap C = C$

$$\Rightarrow B \subset A \ \wedge\ C \subset B \ \Rightarrow\ C \subset A$$

$$\Rightarrow A \cap C = C \ \Rightarrow A \prec C$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 6.5

1. Sea $X = \{ a, b, c, d, e \}$ ordenado como indica el diagrama siguiente. Hallar todas las cadenas que tienen 3 elementos.



2. Probar que la siguiente relación en $\mathbb{R}^2$ es una relación de orden (llamada orden lexicográfico).

$$(a, b) \prec (c, d) \ \Leftrightarrow\ a < c \ \vee\ (a = c \ \wedge\ b \leq d)$$

3. Si R es una relación de orden, probar que R^{-1} también es una relación de orden (llamada orden inverso).

4. Sea R una relación en X. Probar que:

$$R \text{ es una relación de orden } \Leftrightarrow\ R \circ R = R \ \wedge\ R \cap R^{-1} = I_X$$

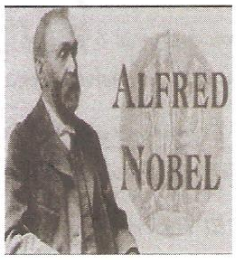
5. Sea R una relación en X. Probar que:

$$R \text{ es de orden total} \Leftrightarrow R \circ R = R, \quad R \cap R^{-1} = I_X \quad \text{y} \quad R \cup R^{-1} = X \times X.$$

¿SABIAS QUE NO HAY PREMIO NOBEL EN MATEMATICAS?

*Los **Premios Nobel** son, a nivel mundial, los más prestigiosos galardones que se otorgan a personas que han realizado trabajos sobresalientes en los campos de la **física, química, medicina, literatura, la paz** y, desde 1.969, en **economía**. Estos premios entregan anualmente en Estocolmo, Suecia, desde 1.901,*

*El creador de estos premios fue el químico e industrial sueco **Alfred Nobel (1.833-1.896)**, quien inventó la dinamita e hizo una fortuna con este invento.*



*Años más tarde, su invento engendró en él un fuerte complejo de culpa cuando la dinamita fue usada en la guerra, aniquilando muchas vidas humanas. El su testamento, firmado el 27 de noviembre de 1.895, estableció que su fortuna sea utilizada para premiar a las personas cuya labor hubiera sido sobresaliente a lo largo de su vida en alguno de los campos: **física, química, medicina, literatura y la paz.***

*Como se ve, Nobel, en su testamento, no puso entre los campos a premiar a la **Matemática**. Existen leyendas y chismes para explicar esta omisión. Un de ellos dice que sus asesores le informaron que quien podría merecer el premio en la categoría de matemáticas era su compatriota **Mittag-Leffrer (1.846-1.927)**. Pero, Nobel no se llevaba bien con este candidato, por lo que prefirió eliminar el campo de la matemática, para evitar esta premiación. Aquí entra el chisme: se decía que Nobel no se llevaba bien con Mittag-Leffrer por que se enteró que el matemático tenía amoríos con su esposa. Este chisme se descarta porque Nobel no era casado. Por otro lado, ellos dos apenas se conocían y, por tanto, no podían llevarse mal.*

Otra leyenda dice que Nobel no consideró a la Matemática en la lista porque, erróneamente, él pensaba que esta ciencia no tiene aplicación a corto plazo en la vida práctica de la sociedad.

Lo que parece más razonable para que Nobel no incluyera a la Matemática en su testamento es que, en esa época, ya existía ***El Premio Escandinavo de Matemáticas****, que lo otorgaba el rey de Suecia.*

LA MEDALLA FIELDS

En vista de no que existía un premio Nobel en matemáticas, ***La Unión Matemática Internacional*** *creó su propio galardón:* ***La Medalla Internacional para Descubrimientos Sobresalientes en Matemáticas,*** *mejor conocida como* ***La Medalla Fields.***

Medalla Fields

Las Medallas se entregan cada 4 años, los galardonados son a lo más 6 y éstos deben ser menores de 40 años de edad. La primera entrega fue el año 1.936.

Existen opiniones que discrepan con la reglas anteriores. Sugieren que el premio debe ser anual y sin límite de edad.

El nombre de esta medalla se debe al matemático canadiense ***John Charles Fields (1.863-1.933),*** *quien diseñó las normas del premio. Además, como Nobel, Fields dejó parte de su patrimonio económico para financiar la medalla.*

J. Ch. Fields

EL PREMIO ABEL

El Premio Abel *es un galardón anual que otorga el Rey de Noruega a un matemático destacado a nivel mundial. Este premio se creó el año 2,002, al cumplirse el bicentenario del nacimiento del matemático* ***Niels Henry Abel.***

El destacado matemático noruego ***Sophus Lie (1.843-1.899)*** *fue el primero en proponer la creación del Premio Abel cuando, en 1.897, se enteró que Alfred Nobel no tenía intención de incluir a las Matemáticas en su testamento.*

Sophus Lie

pítulo 6. Relaciones

a Matemática en su

Escandinavo de

Medalla Fields

ren que el premio

se

el

o

J. Ch. Fields

Noruega a un

l año 2,002, al

ry Abel.

l

Sophus Lie

7

FUNCIONES

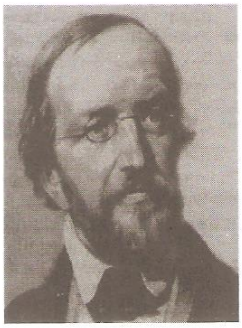
PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET
(1.805-1.859)

7.1 FUNCIONES

7.2 FUNCION INVERSA Y COMPOSICION

7.3 IMAGENES DE CONJUNTOS

7.4 SUCESIONES Y RELACIONES DE RECURRENCIA



PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1.805-1.859)

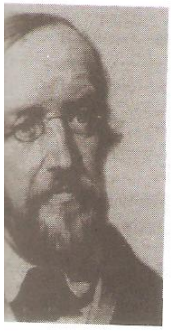
PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET nació en Düren, Alemania, el 13 de febrero de 1.805. Fue profesor de la Universidad de Breslau (1.827) y de la Universidad de Berlín (1.828-1.855) En 1.855 sucedió al gran Gauss en la Universidad de Göttingen, en Hanover.

Sus investigaciones se desarrollaron en varios campos de la matemática. Hizo contribuciones valiosas en la teoría de números, análisis, mecánica, etc.

En 1.837, Dirichlet propuso ***el concepto moderno de función.*** *El término función fue acuñada por* ***Leibniz (1.646-1.716),*** *muchos años atrás. Más tarde,* ***Johann Bernoulli (1.667-1.748), Leonardo Euler (1.707-1.783), Alexis Clairaut (1.713-1.765) y Jean Baptiste Josehp Fourier (1.768-1.830)*** *contribuyeron en la evolución de este concepto. Después de una vida fructífera en producción matemática, muere en Göttingen, el 5 de mayo de 1.859*

ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

Al siguiente año del nacimiento de Dirichlet, el precursor Francisco de Miranda desembarcó en el Puerto de la Vela y marchó sobre Coro (3 de agosto de 1.806). Durante su juventud tuvo lugar casi toda la gesta independentista de Simón Bolívar y José de San Martín, para liberar a la América Hispana. Muere a los pocos meses de estallar la Revolución Federal (20 de febrero de 1.859). Entre otros hechos importantes acaecidos durante la vida de Dirichlet tenemos: Se inventaron el ferrocarril (1830), el motor eléctrico (1.831), el teléfono (1.833), la cámara fotográfica (1.839) y el submarino (1.850), se publicó ***Viaje a las Regiones Equinocciales*** *de* ***Humboldt*** *(1.834).*



Alemania, el 13 de (1.827) y de la gran Gauss en la

matemática. Hizo etc.

ción.** El término atrás. Más tarde,* ***Alexis Clairaut *ntribuyeron en la en producción*

TANTES

cisco de Miranda agosto de 1.806). de Simón Bolívar a los pocos meses tre otros hechos Se inventaron el ímara fotográfica ***quinocciales*** *de*

SECCION 7.1
FUNCIONES

Uno de los conceptos fundamentales de la matemática y que está presente en cada una de las distintas ramas, es el concepto de función. Con frecuencia se da la siguiente definición de función: "una función del conjunto X en un conjunto Y es una ***regla*** que asigna a cada elemento de X un único elemento de Y". Esta definición tiene el gran inconveniente de que usa el término "regla", al cual no se le da un significado preciso. Para definir rigurosamente el concepto de función recurrimos al lenguaje de las relaciones.

DEFINICION Sean X e Y dos conjuntos. **Una función de X en Y** es una tríada **(f, X, Y)**, donde f es una relación de X en Y que satisface las dos condiciones siguientes:

1. $\text{dom}(f) = X$ **2.** $x f y \wedge x f z \Rightarrow y = z$

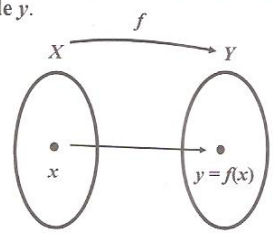
para indicar que (f, X, Y) es una función de X en Y se escribe:

$$f : X \to Y$$

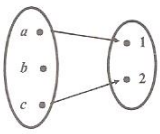
y para indicar que $x f y$ ó $(x, y) \in f$, se escribe

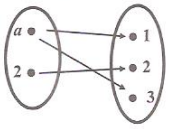
$$y = f(x)$$

y se dice que **y es la imagen de x mediante f** y que **x es una preimagen de y**.



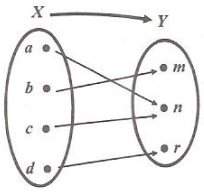
Examinemos cuidadosamente la definición de función. La condición **(1)** nos dice que ***cada*** elemento de X tiene una imagen. La condición **(2)** dice que la imagen de un elemento es ***única***. Así, las siguientes relaciones no son funciones. La primera viola la relación **(1)**, y la segunda, viola la condición **(2)**.





EJEMPLO 1 Si $X = \{ a, b, c, d \}$ y $Y = \{ m, n, r \}$, entonces la siguiente relación es una función de X en Y.

$$f = \{ (a, n), (b, m), (c, n), (d, r) \}$$

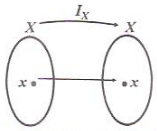


Tenemos que: $f(a) = n$, $f(b) = m$, $f(c) = n$ y $f(d) = r$

EJEMPLO 2 **La función identidad**

Sea X un conjunto cualquiera. Es evidente que la relación diagonal $I_X \subset X \times X$ es una función de X en X, a la que llamaremos **la función identidad** del conjunto X. Tenemos que:

$$I_X(x) = x$$

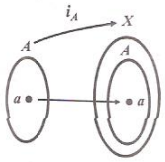


EJEMPLO 3 **La función inclusión**

Sea A un subconjunto de X. Se llama **función inclusión de A en X** a la función

$$i_A : A \to X$$

$$i_A(a) = a$$



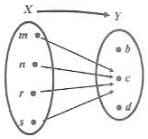
Observar que en el caso particular de que $A = X$, la función inclusión i_A es la función identidad I_X.

EJEMPLO 4 **Función constante**

Sean X e Y dos conjuntos y sea c un elemento fijo de Y. Se llama **función constante determinada por c** a la siguiente función:

$$f : X \to Y$$

$$f(x) = c, \ \forall x \in X$$



EJEMPLO 5 **Funciones de dos variables**

Sean X, Y y Z tres conjuntos. A cualquier función

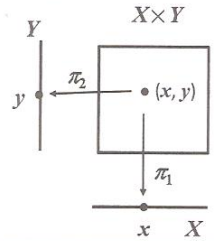
$$f: X \times Y \to Z$$

se llama función de ***dos variables***.

Las siguientes funciones de dos variables reciben el nombre de **primera** y **segunda proyección**, respectivamente.

1. $\pi_1: X \times Y \to X$

$\pi_1(x, y) = x$



2. $\pi_2: X \times Y \to Y$

$\pi_2(x, y) = y$

IGUALDAD DE FUNCIONES

Una función de X en Y es, por ser una relación, un subconjunto de $X \times Y$. Luego, dos funciones son iguales si estas son iguales como conjuntos. El siguiente teorema nos proporciona un criterio más manejable de igualdad de funciones.

TEOREMA 7.1 Sean $f: X \to Y$ y $g: X \to Y$ dos funciones. Entonces

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \ \forall x \in X$$

Demostración

$(\Rightarrow)$ $y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in f \Leftrightarrow (x, y) \in g \Leftrightarrow y = g(x)$

Luego, $f(x) = g(x)$.

$(\Leftarrow)$ $(x, y) \in f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = g(x) \Leftrightarrow (x, y) \in g$

Luego, $f = g$.

FUNCIONES REALES

Una **función real** es una función $f: X \to \mathbb{R}$, donde X es un conjunto cualquiera.

EJEMPLO 6 **Función característica**

Sean X un conjunto cualquiera y A un conjunto de X. Se llama **función característica** de A a la siguiente función real:

$$\chi_A: X \to \mathbb{R}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in A \\ 0, & si\ x \notin A \end{cases}$$

Las funciones en las que se interesa el cálculo diferencial e integral, son las funciones reales $f : X \to \mathbb{R}$, donde el dominio X es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Estas funciones reciben el nombre de **funciones reales de variable real** . Dentro de éstas, las más comunes son las funciones polinomiales. Si n es un número natural, una **función polinomial de grado *n*** o simplemente un **polinomio de grado *n*** es una función de la forma

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + ax + a_0$$

donde $a_n, \ldots, a_0$ son números reales, siendo $a_n \neq 0$.

A la función polinomial de grado 1, $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$, también se la llama función lineal.

A la función polinomial de grado 2, $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, también se la llama **función cuadrática.**

RESTRICCION Y EXTENSION DE UNA FUNCION

Sea $f : X \to Y$ una función y A un subconjunto de X. Se llama ***restricción*** de f al conjunto A a la función

$$g : A \to Y$$
$$g(x) = f(x)$$

A la función g se acostumbra denotarla por f/A. Por otro lado, si $f: X \to Y$ es una función, X es subconjunto de Z y $h : Z \to Y$ es una función tal que la restricción de h a X es igual a f, entonces se dice que h es una ***extensión*** o ***prolongación*** de f al conjunto Z.

La restricción de una función a un conjunto es única, en cambio, una función puede tener muchas extensiones a un mismo conjunto.

EJEMPLO 7 Sea la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Las siguientes funciones son dos extensiones de f al conjunto $\mathbb{R}$.

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

FUNCIONES INYECTIVAS

DEFINICION Una función $f : X \to Y$ es **inyectiva** o es una **inyección** si satisface la condición.

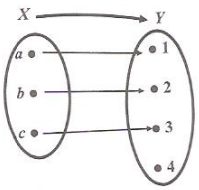
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

o, lo que es lo mismo (contrarrecíproco),

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Observar que la condición anterior simplemente dice que cualquier elemento y de Y tiene a lo más una preimagen.

EJEMPLO 8 La función adjunta es inyectiva



EJEMPLO 9 La siguiente función es inyectiva:

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$g(n) = 2n$$

En efecto:

$$g(n) = g(m) \Rightarrow 2n = 2m \Rightarrow n = m$$

EJEMPLO 10 Una función lineal $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) = ax + b, \quad a \neq 0$$

es inyectiva. En efecto,

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

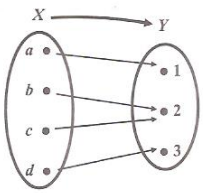
FUNCIONES SOBREYECTIVAS

DEFINICION Una función $f : X \to Y$ es **sobreyectiva** si **rang(f) = Y.** O, en otros términos,

$$\forall y \in Y, \ \exists x \in X \ / \ f(x) = y$$

Observar que esta condición dice que todo elemento de Y tiene una preimagen.

EJEMPLO 11 La función adjunta es sobreyectiva.



EJEMPLO 12 Una función lineal es sobreyectiva.

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$h(x) = ax + b,\ a \neq 0$$

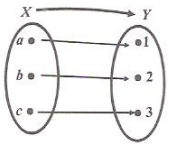
En efecto, para $y \in \mathbb{R}$, tomamos $x = \dfrac{y-b}{a}$ y tenemos que

$$h(x) = h(y-b/a) = a\,\frac{y-b}{a} + b = y$$

FUNCIONES BIYECTIVAS

DEFINICION Una función es **biyectiva** si es **inyectiva y sobreyectiva**.

EJEMPLO 13 La siguiente función es biyectiva.



EJEMPLO 14 La función identidad de X es biyectiva

$$I_X : X \to X, \quad I_X(x) = x$$

EJEMPLO 15 Una función lineal es biyectiva.

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$h(x) = ax + b,\ a \neq 0$$

En efecto, el ejemplo 9 nos dice que h es inyectiva y el ejemplo 12, que h es sobreyectiva.

PROBLEMAS RESUELTOS 7.1

PROBLEMA 1 Determinar si las siguientes funciones son inyectivas:

a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ **b.** $g : [-2, 2] \to [0, 4]$, $g(x) = x^2$ **c.** $h : [2, 6] \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$

Solución

a. f no es inyectiva, ya que $-1 \neq 1$ y, sin embargo, $f(-1) = f(1)$.

b. g no es una inyectiva, ya que $-2 \neq 2$ y, sin embargo, $g(-2) = g(2)$.

c. h sí es inyectiva, ya que dos números reales positivos distintos tienen cuadrados distintos. En forma más precisa:

$$x_1,\ x_2 \in [2, 6] \quad \text{y} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) = x_1^2 \neq x_2^2 = h(x_2).$$

PROBLEMA 2 Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2$$

¿En qué intervalos $I \subset \mathbb{R}$, la restricción de f a I es inyectiva?

Solución

f es inyectiva en cualquier intervalo I conformado o sólo por números positivos o sólo números negativos. Entre estos, los más amplios son $[0, +\infty)$ y $(-\infty, 0]$.

PROBLEMA 3 Determinar si las funciones del problema 1 son sobreyectivas

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ **b.** $g: [-2, 2] \to [0, 4]$, $g(x) = x^2$ **c.** $h: [2, 6] \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$

Solución

a. f no es sobreyectiva. En efecto, cualquier número negativo no tiene preimagen.

b. g es sobreyectiva. En efecto:

si $y \in [0, 4]$, tomamos $x = \sqrt{y}$ y se tiene que

$x \in [-2, 2] \ \wedge \ g(x) = g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y.$

c. h no es sobreyectiva. En efecto, ningún número mayor que 36 o ningún número menor que 4 tiene preimagen.

PROBLEMA 4 Probar que la siguiente función es biyectiva

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^3$$

Solución

a. Inyectividad:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \ \vee \ x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 \qquad (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 0 \text{ no tiene soluciones reales})$$

b. Sobreyectividad:

Dado $y \in \mathbb{R}$, buscamos $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. O sea, $x^3 = y$. Despejamos x en esta ecuación, obtenemos $x = \sqrt[3]{y}$. Este es el x buscado. En efecto:

$$f(x) = f\left(\sqrt[3]{y}\right) = \left(\sqrt[3]{y}\right)^3 = y$$

PROBLEMA 5 Sean A y B subconjuntos de un conjunto U. Probar que

$$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x), \ \forall\, x \in U$$

Solución

Si $x \in U$, entonces o $x \in A \cap B$ o $x \in \complement(A \cap B)$. Considerar dos casos:

Caso 1: $x \in A \cap B$.

Si $x \in A \cap B$, entonces $\chi_{A \cap B}(x) = 1$

Por otro lado, $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow \chi_A(x) = 1 \wedge \chi_B(x) = 1$

$$\Rightarrow \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1 \cdot 1 = 1$$

En consecuencia,

$$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x), \quad \forall x \in A \cap B$$

Caso 2: $x \in \complement(A \cap B)$.

Si $x \in \complement(A \cap B)$, entonces $\chi_{A \cap B}(x) = 0$

Por otro lado,

$x \in \complement(A \cap B) \Leftrightarrow x \in \complement A \cup \complement B \Leftrightarrow x \in \complement A \vee x \in \complement B$

Luego,

$\chi_A(x) = 0 \vee \chi_B(x) = 0$ y, por lo tanto, $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 0$

En consecuencia, para este otro caso también tenemos que

$$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x), \ \forall x \in \complement(A \cap B)$$

Por último, habiéndose cumplido ambos casos concluimos que:

$$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x), \ \forall\, x \in U.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 7.1

1. ¿Cuáles de las siguientes relaciones de $X = \{ a, b, c \}$ en $Y = \{ m, n, r \}$ son funciones?

a. $R = \{ (a, m), (b, n) \}$

b. $S = \{ (a, n), (b, r), (c, m), (c, n) \}$

c. $T = \{ (a, n), (b, r), (c, r) \}$

d. $H = \{ (a, m), (b, m), (c, m) \}$

2. De las siguientes funciones:

i. $f : [-2, 1] \to [0, 4]$
$f(x) = x^2$

ii. $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$
$g(x) = x^3$

iii. $h : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$
$h(x) = |x|$

iv. $k : \left[-\pi/2, \pi/2\right] \to [-1, 1]$
$k(x) = \operatorname{sen} x$

a. ¿Cuáles son inyectivas?

b. ¿Cuáles son sobreyectivas?

b. ¿Cuáles son biyectivas?

3. ¿Puede ser una función constante inyectiva?

4. ¿Puede ser una función constante sobreyectiva?

5. Probar que la siguiente función es biyectiva

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^3}{8} - 1$$

6. Probar que la siguiente función es biyectiva

$$h : X \times Y \to Y \times X,$$
$$h(x, y) = (y, x)$$

7. Probar que la siguiente función es biyectiva

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 4 \\ \frac{5}{2}x + 6, & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

8. Sea $A = \mathbb{R} - \{3\}$, y sea la función

$$f : A \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x-3}$$

a. Probar que f es inyectiva.

b. Hallar una función biyectiva $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea una extensión de f a $\mathbb{R}$.

9. Sean A y B subconjuntos de un conjunto referencial U. Probar que:

a. $\chi_{\complement A}(x) = 1 - \chi_A(x),\quad \forall\, x \in U$

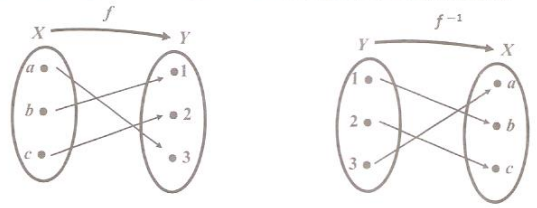
b. $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x),\quad \forall\, x \in U$

SECCION 7.2
FUNCION INVERSA Y COMPOSICION DE FUNCIONES

DEFINICION Una función $f: X \to Y$ es **invertible** si su relación inversa $f^{-1}: Y \to X$ es también una función.

En este caso, diremos que $\boldsymbol{f^{-1}: Y \to X}$ **es la función inversa de** f.

EJEMPLO 1 Sean $X = \{ a, b, c \}$, $Y = \{ 1, 2, 3 \}$. La función $f: X \to Y$ dada en el siguiente diagrama de la izquierda es invertible.



En efecto, el diagrama de la derecha nos muestra que la relación inversa $f^{-1}: Y \to X$ es también una función.

OBSERVACION Si $f: X \to Y$ es invertible, entonces

$$y = f(x) \Leftrightarrow x\, f\, y \Leftrightarrow y\, f^{-1}\, x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

O sea,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Regresando al ejemplo 1 anterior, notamos que la función f dada es biyectiva. Este hecho no es casual. El siguiente teorema nos dice que las funciones biyectivas son *las únicas invertibles.*

TEOREMA 7.2 Sea $f: X \to Y$ una función. Entonces

$$f \text{ es biyectiva} \Leftrightarrow f \text{ es invertible}$$

Demostración

($\Rightarrow$) Debe probar que la relación inversa $f^{-1}: Y \to X$ es una función.

Sabemos que

$$\text{dom}(f^{-1}) = \text{rang}(f) \qquad (1)$$

Además, por ser $f: X \to Y$ sobreyectiva, se tiene que

$$\text{rang}(f) = Y \qquad \textbf{(2)}$$

Luego, de (1) y (2) obtenemos que

$$\text{dom}(f^{-1}) = Y \qquad \textbf{(3)}$$

Por otro lado:

$$y f^{-1} x \wedge y f^{-1} z \Leftrightarrow x f y \wedge z f y \Leftrightarrow y = f(x) \wedge y = f(z)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x = z \qquad (f \text{ es inyectiva})$$

O sea, $y f^{-1} x \wedge y f^{-1} z \Rightarrow x = z$ **(4)**

Las expresiones (3) y (4) nos dicen que $f^{-1}: Y \to X$ es una función.

(⇐) Debemos probar que f es inyectiva y sobreyectiva.

***f* es inyectiva.** En efecto:

$$y = f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \, f \, y \wedge x_2 \, f \, y$$

$$\Leftrightarrow y f^{-1} x_1 \wedge y f^{-1} x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \qquad (\text{por ser } f^{-1} \text{ función})$$

***f* es sobreyectiva.** En efecto: $\text{rang}(f) = \text{dom}(f^{-1}) = Y$ (por ser f^{-1} función)

COROLARIO 7.3 Si la función $f: X \to Y$ es invertible, entonces la función inversa $f^{-1}: Y \to X$ es biyectiva.

Demostración

Como $(f^{-1})^{-1} = f$, entonces f^{-1} es invertible. Luego, por el teorema anterior, f^{-1} es biyectiva.

EJEMPLO 2 Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3$$

a. Verificar que esta función es invertible.

b. Hallar la función inversa f^{-1}.

Solución

a. En el problema resuelto 4 de la sección anterior hemos probado que esta función es biyectiva. Luego, por el teorema anterior esta función es invertible.

b. Sabemos que: $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = x^3$

Luego, para hallar $x = f^{-1}(y)$ debemos despejar x de la ecuación $y = x^3$.

Bien, $y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$

Luego, la función inversa de f es la función

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

NOTA Para expresar la inversa f se puede usar cualquier variable. Así:

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}\,,\quad f^{-1}(z) = \sqrt[3]{z}\,,\quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

COMPOSICION DE FUNCIONES

Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son dos funciones, es fácil ver que la relación compuesta

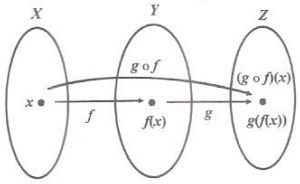
$$g \circ f : X \to Z$$

también una función, a la que llamaremos **función compuesta de f con g**.

De acuerdo a la definición de composición, tenemos que

$$\mathbf{g \circ f : X \to Z}$$

$$\mathbf{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$



EJEMPLO 3 Dadas las funciones

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 \quad g(x) = x + 1$

Se tiene que:

1. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$
2. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

El ejemplo anterior nos muestra que la **composición de funciones no es conmutativa**. Sin embargo, como las funciones son relaciones y la composición de relaciones es asociativa, la composición de funciones es también asociativa. Esto es,

Si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : Z \to W$, entonces,

$$\mathbf{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f}$$

TEOREMA 7.4 Si $f : X \to Y$ es invertible, entonces

1. $f^{-1} \circ f = I_X$ $\qquad$ 2. $f \circ f^{-1} = I_Y$

Demostración

1. Sea $x \in X$ e $y = f(x)$. Tenemos: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
Ahora,
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = I_X(x). \text{ Esto es, } f^{-1} \circ f = I_X.$$
2. Similar a **1.**

TEOREMA 7.5 Sea $f: X \to Y$ una función. Si existe una función $g: Y \to X$ tal que

1. $f \circ g = I_Y$ y **2.** $g \circ f = I_X$,

entonces f es biyectiva (y, por lo tanto, invertible) y $g = f^{-1}$.

Demostración

En primer lugar, probaremos que la igualdad **2.** implica que f es inyectiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$
$$\Rightarrow I_X(x_1) = I_X(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

En segundo lugar, probamos que la igualdad **1.** implica que f es sobreyectiva:

Dado $y \in Y$, sea $x = g(y)$. Tenemos que:
$$f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = I_Y(y) = y$$

Por último probamos que $g = f^{-1}$.

Sea y cualquier elemento de Y:
$$x = g(y) \Rightarrow f(x) = f(g(y)) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$
Recíprocamente
$$x = f^{-1}(y) \Rightarrow f(x) = y, \quad g(f(x)) = g(y) \Rightarrow x = g(y)$$

Luego,
$$x = g(y) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), \ \forall y \in Y$$
Por lo tanto, $g(y) = f^{-1}(y), \ \forall y \in Y$. Esto es, $f^{-1} = g$

Los dos teoremas anteriores los resumimos en el siguiente teorema:

TEOREMA 7.6 Sea $f: X \to Y$ una función. Entonces

$$\boldsymbol{f \text{ es invertible} \Leftrightarrow \exists\ g: Y \to X \ / \ g \circ f = I_X \ \wedge \ f \circ g = I_Y}$$
Además, en este caso, $g = f^{-1}$.

EQUIPOTENCIA, PARTE 2

Si $f: X \to Y$ es una función biyectiva, entonces todo elemento de X tiene exactamente una imagen en Y, y todo elemento de Y, tiene exactamente una preimagen de X. De este modo todos los elementos de X y todos los elementos de Y

quedan asociados en pares. Por esta razón a las biyecciones se las llama también **correspondencias biunívocas**.

Tomando en cuenta esta observación, podemos reformular el concepto de conjuntos equipotentes, en la forma siguiente:

Sean A y B dos conjuntos. **A es equipotente con B**, y se escribe $A \cong B$, si y sólo si existe una **función biyectiva** $f: A \to B$.

Con esta definición es fácil probar que la relación de equipotencia es una relación de equivalencia (ver el problema resuelto 3)

Ahora ya estamos en condiciones de cumplir una vieja promesa: Probar que, a pesar de que $\mathbb{N}$ puede verse como un subconjunto propio de $\mathbb{Z}$, ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos; es decir, ambos tienen el mismo cardinal.

TEOREMA 7.7 $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$

Demostración

Debemos probar que $\mathbb{N}$ es equipotente con $\mathbb{Z}$. En efecto, la siguiente función es biyectiva (ver el problema resuelto 4)

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$f(n) = \begin{cases} (n+1)/2, & \text{si } n \text{ es impar} \\ -n/2, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Esta función hace corresponder a 0 con 0, a los naturales impares con los enteros positivos y a los naturales pares, con los enteros negativos, del modo siguiente:

$$\begin{array}{l} \mathbb{N} = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \ldots\ \} \\ \qquad\ \ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ \mathbb{Z} = \{\ 0,\ 1, -1,\ 2, -2,\ 3, -3, 4, -4,\ \ldots\ \} \end{array}$$

PROBLEMA RESUELTO 7.2

PROBLEMA 1 Sea la función $f: \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R} - \{2\}$, $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-5}$

1. Probar que f es biyectiva
2. Hallar la función inversa de f.

Solución

1. Debemos probar que f es inyectiva y sobreyectiva.

Inyectividad:

es se las llama también

nular el concepto de

ibe $A \cong B$, si y sólo si

tencia es una relación

omesa: Probar que, a
$\mathbb{Z}$, ambos conjuntos
mismo cardinal.

siguiente función es

res con los enteros
do siguiente:

$= \dfrac{2x+3}{x-5}$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{2a+3}{a-5} = \frac{2b+3}{b-5} \Rightarrow (2a+3)(b-5) = (a-5)(2b+3)$$
$$\Rightarrow 2ab - 10a + 3b - 15 = 2ab + 3a - 10b - 15$$
$$\Rightarrow -13a = -13b \Rightarrow a = b$$

Sobreyectividad:

Dado $y \in \mathbb{R} - \{2\}$, debemos hallar $x \in \mathbb{R} - \{5\}$ tal que $f(x) = y$. Bien,

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-5} = y \Leftrightarrow 2x + 3 = (x-5)y \Leftrightarrow 2x + 3 = xy - 5y$$
$$\Leftrightarrow 2x - xy = -5y - 3 \Leftrightarrow x(2-y) = -5y - 3$$
$$\Leftrightarrow x(y-2) = 5y + 3 \Leftrightarrow x = \frac{5y+3}{y-2} \qquad (y \neq 2)$$

Luego, para $y \in \mathbb{R} - \{2\}$, tomamos $x = \dfrac{5y+3}{y-2}$, y se cumple que $f(x) = y$.

2. Sabemos que: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Al probar la sobreyectividad de f hemos hallado que $x = \dfrac{5y+3}{y-2}$

Luego, $f^{-1} : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{5\}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+3}{x-2}$

PROBLEMA 2 Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos funciones. Probar que:

a. Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva

b. Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva

c. Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva

d. Si f y g son invertibles, entonces $g \circ f$ es invertible y que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Solución

a. $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, ($g$ es inyectiva)

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (f es inyectiva)

b. Dado $z \in Z$, buscamos $x \in X$ tal que $(g \circ f)(x) = z$.

Por ser g sobreyectiva, para el $z \in Z$ dado, existe $y \in Y$ tal que $g(y) = z$.

Por ser f sobreyectiva, para el $y \in Y$ encontrado, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$

Luego, para este x cumple:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

c. Es consecuencia directa de las partes **a** y **b** anteriores.

d. Si f y g son invertibles, entonces, por el teorema 7.2, f y g son biyectivas. Por la parte **c** anterior, $g \circ f$ es biyectiva y, por tanto, invertible.

Por último, la igualdad $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ya ha sido probado para el caso más general de las relaciones en el capítulo anterior.

PROBLEMA 3 Sea U un conjunto referencial. Probar que la relación de equipotencia en $\wp(U)$,

$$A \cong B \Leftrightarrow \exists f : A \to B \,/\, f \text{ es biyectiva},$$

es una relación de equivalencia.

Solución

Reflexividad

Sea $A \in \wp(\mathrm{U})$. La función identidad $I_A : A \to A$ es biyectiva. Luego, $A \cong A$

Simetría

$A \cong B \Rightarrow \exists f : A \to B \,/\, f$ es biyectiva.

Por el teorema 7.2 y el corolario 7.3 obtenemos que $f^{-1} : B \to A$ también es biyectiva y, por tanto, $B \cong$ A.

Transitividad:

$$A \cong B \;\wedge\; B \cong C \Leftrightarrow \exists f : A \to B \;\wedge\; \exists g : B \to C \,/\, f \text{ y } g \text{ son biyectivas.}$$

Por la parte **c** del problema anterior sabemos que $g \circ f : A \to C$ también es biyectiva y, por lo tanto, $A \cong C$.

PROBLEMA 4 Probar que la función, dada en el teorema 7.7, es biyectiva:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$f(n) = \begin{cases} (n+1)/2, & \text{si } n \text{ es impar} \\ -n/2, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Solución

1. f es inyectiva. Probaremos que: $f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$

Caso 1. n y m son impares.

$$f(n) = f(m) \Rightarrow \frac{n+1}{2} = \frac{m+1}{2} \Rightarrow n+1 = m+1 \Rightarrow n = m$$

Caso 2. n y m son pares.

$$f(n) = f(m) \Rightarrow -\frac{n}{2} = -\frac{m}{2} \Rightarrow -n = -m \Rightarrow n = m.$$

Caso 3. n impar y m es par o n par y m es impar

Este caso queda desechado, ya que $f(n)$ y $f(m)$ tienen distinto signo y, por tanto, la igualdad $f(n) = f(m)$ nunca puede darse.

Sobreyectividad

Dado, $z \in \mathbb{Z}$.

Si $z > 0$, tomamos el natural $n = 2z - 1$ y tenemos que

$$f(n) = \frac{n+1}{2} = \frac{2z-1+1}{2} = z$$

Si $z \leq 0$, tomamos el natural $n = -2z$ y tenemos que

$$f(n) = -\frac{n}{2} = -\frac{-2z}{2} = z.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 7.2

1. Hallar la función inversa de cada una de las siguientes funciones:

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2x}{3} - \frac{1}{5}$$

b. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{1}{8}x^3 - 1$$

c. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 4 \\ \frac{5}{2}x + 6, & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

d. $f: \mathbb{R} - \{-1/4\} \to \mathbb{R} - \{1/2\}$

$$f(x) = \frac{2x+3}{4x+1}$$

2. Hallar la función inversa de una función lineal:

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$h(x) = ax + b, \ a \neq 0$$

3. Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^3}{27} + 2$, hallar :

a. $g \circ f$ **b.** $f \circ g$ **c.** $f^{-1} \circ g$ **d.** $g^{-1} \circ f$

4. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 2$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 2$.

Si $g(f(ax)) = g^{-1}(f^{-1}(ax)) = \frac{x}{3}$, hallar $(f \circ g)(1/3)$

5. Sea $f: X \to Y$ una función. Probar que

a. $I_Y \circ f = f$ **b.** $f \circ I_X = f$

6. Sean $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ dos funciones. Probar que

a. $g \circ f$ es inyectiva $\Rightarrow f$ es inyectiva.

b. $g \circ f$ es sobreyectiva $\Rightarrow g$ es sobreyectiva

7. Las funciones $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ y $h: Z \to W$ son tales que $g \circ f$ y $h \circ g$ son biyectivas. Probar que f, g y h son biyectivas.

8. Sean $g: Y \to Z$ y $h: Y \to Z$ dos funciones. Si para toda función $f: X \to Y$ se cumple que $g \circ f = h \circ f$, probar que $g = h$.

9. Sea $f: Y \to Z$ una función. Probar que f es inyectiva si y sólo si, para todo par de funciones $g: X \to Y$ y $h: X \to Y$, $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$.

10. Sea $f: X \to Y$ una función. Probar que f es sobreyectiva si y sólo si para todo par de funciones $g: Y \to Z$ y $h: Y \to Z$, $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$.

SECCION 7.3
IMAGENES DE CONJUNTOS

DEFINICION Sean $f: X \to Y$ una función, A y B dos conjuntos tales que

$$A \subset X \text{ y } B \subset Y$$

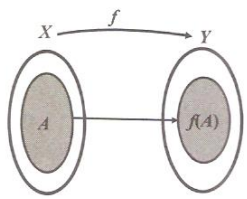
1. Se llama **imagen** de A mediante f al conjunto

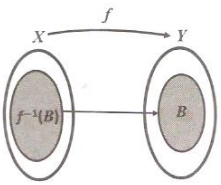
$$f(A) = \{ f(x) \in Y / x \in A \}. \text{ O bien}$$

$$f(A) = \{ y \in Y / \exists x \in A \wedge y = f(x) \}$$

2. Se llama **imagen inversa** de B mediante f al conjunto

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X / f(x) \in B \}$$



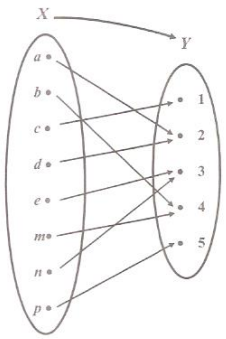


EJEMPLO 1 Sean $X = \{ a, b, c, d, e, m, n, p \}$,
$Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$,
$A = \{ b, d, e, m \}$,
$B = \{ 1, 3, 4 \}$

y $f: X \to Y$ la función adjunta.

Hallar:

1. $f(A)$ **2.** $f^{-1}(B)$



Solución

1. $f(A) = \{ 2, 3, 4 \}$ **2.** $f^{-1}(B) = \{ b, c, e, m, n \}$

TEOREMA 7.8 Sean $f: X \to Y$ una función, A y B subconjuntos de X, C y D subconjuntos de Y. Entonces

1. $f(\phi) = \phi$ **2.** $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

3. $f^{-1}(Y) = X$ **4.** $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

Demostración

Todas estas expresiones son consecuencia inmediata de las definiciones anteriores. Como muestra, probemos 2, dejando a cargo del estudiante probar las otras tres.

2. $y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \,/\, y = f(x) \Rightarrow \exists x \in B \,/\, y = f(x)$ $(A \subset B)$
$\Rightarrow y \in f(B)$

Luego, $f(A) \subset f(B)$.

EJEMPLO 2 Sea la función $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$

Si $A = \{ -2, -1, 0 \}$ y $B = \{-1, 0, 2 \}$, entonces

$A \cap B = \{ -1, 0 \}$ y $f(A \cap B) = \{ 0, 1 \}$

Además,

$f(A) = \{ 0, 1, 4 \}$, $f(B) = \{ 0, 1, 4 \}$ y $f(A) \cap f(B) = \{ 0, 1, 4 \}$

Observamos que

$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, pero $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

TEOREMA 7.9 Sea $f: X \to Y$ una función y sean A y B dos subconjuntos de X. Entonces,

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ **2.** $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Demostración

1. $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow \exists x \in A \cup B \wedge f(x) = y \Leftrightarrow (\exists x \in A \vee \exists x \in B) \wedge f(x) = y$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in A \wedge f(x) = y) \vee (\exists x \in B \wedge f(x) = y)$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$$

Luego, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. Como $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$, por la parte 2 del teorema anterior obtenemos:

$$f(A \cap B) \subset f(A) \quad \text{y} \quad f(A \cap B) \subset f(B)$$

De donde, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

El ejemplo anterior muestra que la igualdad $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ no siempre se cumple.

El siguiente teorema nos muestra que las imágenes inversas tienen mejor comportamiento que las imágenes directas.

TEOREMA 7.10 Si $f: X \to Y$ y A y B dos subconjuntos de Y. Entonces

1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
3. $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

Demostración

1. $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

Luego, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

2. Se procede en forma similar a 1.

3. $x \in f^{-1}(A - B) \Leftrightarrow f(x) \in (A - B) \Leftrightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \notin B$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$$

Luego, $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

PROBLEMAS RESUELTOS 7.3

PROBLEMA 1 Sea la función $f: X \to Y$ y $A \subset X$, probar que

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$
2. f es inyectiva $\Leftrightarrow A = f^{-1}(f(A)), \forall A \subset X$.

Solución

1. $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$. Luego, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2. $(\Rightarrow)$ Probamos: f es inyectiva $\Rightarrow$ $A = f^{-1}(f(A)), \forall A \subset X$.

Por la parte 1. ya sabemos que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Por lo tanto, sólo falta probar:

$$f^{-1}(f(A)) \subset A$$

Ahora bien,

$$x \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow \exists a \in A \,/\, f(x) = f(a) \Rightarrow a = x \qquad (f \text{ inyectiva})$$
$$\Rightarrow x \in A$$

Luego, $f^{-1}(f(A)) \subset A$

$(\Leftarrow)$ Probamos: $A = f^{-1}(f(A)), \forall A \subset X \Rightarrow f$ es inyectiva.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow f(\{a\}) = f(\{b\}) \Rightarrow f^{-1}(f(\{a\})) = f^{-1}(f(\{b\}))$$
$$\Rightarrow \{a\} = \{b\} \Rightarrow a = b$$

Luego, f es inyectiva.

PROBLEMA 2 Dada una función $f: X \to Y$, ésta determina esta otra función:

$$\overline{f}: \wp(X) \to \wp(Y), \quad \overline{f}(A) = f(A)$$

Probar: f es inyectiva $\Leftrightarrow$ $\overline{f}$ es inyectiva

Solución

$(\Rightarrow)$ $\overline{f}(A) = \overline{f}(B) \Leftrightarrow f(A) = f(B) \Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(B))$

$\Rightarrow A = B$ (problema 1, parte 2)

Luego, $\overline{f}$ es inyectiva.

$(\Leftarrow)$ $f(a) = f(b) \Rightarrow f(\{a\}) = f(\{b\}) \Rightarrow \overline{f}(\{a\}) = \overline{f}(\{b\})$

$\Rightarrow \{a\} = \{b\}$ ($\overline{f}$ es inyectiva)

$\Rightarrow a = b$

Luego, f es inyectiva.

PROBLEMAS PROPUESTOS 7.3

1. Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$. Si $A = [-3, 2]$ y $B = [-1, 6]$, hallar:

a. $f(A)$ **b.** $f^{-1}(f(A))$ **c.** $f^{-1}(B)$ **d.** $f(f^{-1}(B))$

2. Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 3$. Si $A = [-3, 2]$ y $B = [-1, 5]$, hallar:

a. $f(A)$ **b.** $f^{-1}(f(A))$ **c.** $f^{-1}(B)$ **d.** $f(f^{-1}(B))$

3. Sea $g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{1}{x} - 1$. Si $A = (-3, -1)$ y $B = (-3, 3)$, hallar:

a. $g(A)$ **b.** $g^{-1}(g(A))$ **c.** $g^{-1}(B)$ **d.** $g(g^{-1}(B))$

4. Sea $f: X \to Y$ una función y sean A y B dos subconjuntos de X.

a. Probar que : $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$.

b. Hallar una función $f: X \to Y$ y dos subconjuntos A y B de X tales que

$$f(A) - f(B) \neq f(A - B).$$

5. Sea $f: X \to Y$ una función y B un subconjunto de Y. Probar que:

a. $f(f^{-1}(B)) \subset B$

b. f es sobreyectiva $\Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) = B, \forall\, B \subset Y$.

6. Dada una función $f: X \to Y$, ésta determina esta otra función:

$$\overline{\overline{f}}: \wp(Y) \to \wp(X), \quad \overline{\overline{f}}(B) = f^{-1}(B)$$

Probar que: f es sobreyectiva $\Rightarrow$ $\overline{\overline{f}}$ es inyectiva.

7. Sea $f: X \to Y$ una función. Probar que:

f es inyectiva $\Leftrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B), \forall\, A, B \subset X$.

8. Sea $f: X \to Y$ una función y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de X. Probar:

a. $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ **b.** $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

9. Sea $f: X \to Y$ una función y $\{B_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de Y. Probar:

a. $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ **b.** $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

SECCION 7.4
SUCESIONES Y RELACIONES DE RECURRENCIA

Esta última sección la dedicamos a presentar el concepto de recurrencia, que está muy ligado al axioma de inducción y tiene frecuentes aplicaciones en la programación.

DEFINICION Una **sucesión de elementos de X** es una función de $\mathbb{N}$ a X

Si $f:\mathbb{N} \to X$ es una sucesión y si a_n la imagen de n, es decir $f(n) = a_n$, entonces a esta sucesión la denotaremos así: $\{a_n\}$. También se describen las sucesiones presentando sus términos en orden creciente de los subíndices.

EJEMPLO 1 Sea la sucesión $\{a_n\}$, donde $a_n = n^2$. La lista de los términos de esta sucesión es

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 9,\ a_4 = 16, \ldots, a_n = n^2, \ldots$$

EJEMPLO 2 Sea la sucesión $\{b_n\}$, donde $b_n = n + 5$. La lista de los términos de esta sucesión es:

$$5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots n + 5, \ldots$$

EJEMPLO 3 Sea la sucesión $\{c_n\}$, donde $c_n = (-1)^n$. La lista de los términos de esta sucesión es:

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

EJEMPLO 4 Sea la sucesión $\{d_n\}$, donde $d_n = 1/n$. La lista de los términos de esta sucesión comienza con d_1. El término d_0 es eliminado, ya que la división entre 0 no existe. Los primeros términos de esta sucesión son:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

En los 4 ejemplos anteriores, la sucesión dada en cada caso quedó perfectamente establecida dando una fórmula del término a_n, b_n, c_n o d_n en función únicamente de n. Cuando esto sucede, decimos que la sucesión es dada en forma **explícita.** Existe otra manera de establecer una sucesión, que es la siguiente:

DEFINCION Una sucesión es definida **recursivamente** si

1. Se especifican los términos iniciales.
2. Se da una regla o fórmula para hallar el término n–ésimo en función de los términos anteriores.

EJEMPLO 5 Sea la sucesión $\{a_n\}$, donde $a_0 = 3$ y $a_n = 2a_{n-1}$. Hallar:

a. Algunos de los primeros términos.

b. Una fórmula explícita de la sucesión.

Solución

a. Tenemos:

$$a_1 = 2a_0 = 2(3) = 6, \qquad a_2 = 2a_1 = 2(6) = 12, \qquad a_3 = 2a_2 = 2(12) = 24$$

$$a_4 = 2a_3 = 2(24) = 48, \qquad a_5 = 2a_4 = 2(48) = 96, \qquad \text{etc.}$$

Luego, algunos de los términos de esta sucesión son:

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, \ldots$$

b. $a_n = 2a_{n-1} = 2(2a_{n-2}) = 2^2a_{n-2} = 2^2(2a_{n-3}) = 2^3a_{n-3} = \ldots = 2^na_0 = 2^n(3) = 3\times2^n$

Esto es,

$$a_n = 3\times2^n$$

EJEMPLO 6 Sea la sucesión $\{b_n\}$, donde $b_0 = 1$ y $b_n = nb_{n-1}$. Hallar:

a. Algunos de los primeros términos.

b. Una fórmula explícita de la sucesión.

Solución

a. Tenemos:

$$b_1 = 1b_0 = 1(1) = 1, \qquad b_2 = 2b_1 = 2(1) = 2, \qquad b_3 = 3b_2 = 3(2) = 6,$$

$$b_4 = 4b_3 = 4(6) = 24, \qquad b_5 = 5b_4 = 5(24) = 120, \qquad \text{etc.}$$

Luego, la lista de los primeros términos de esta sucesión es como sigue:

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, \ldots$$

b.

$$\begin{aligned} b_n &= nb_{n-1} = n(n-1)b_{n-2} = n(n-1)(n-2)b_{n-3} \\ &\;\;\vdots \\ &= n(n-1)(n-2)\times\ldots\times2\times1\times b_0 \\ &= n(n-1)(n-2)\times\ldots\times2\times1\times1 = n! \end{aligned}$$

Esto es, $b_n = n!$

EJEMPLO 7 La **sucesión de Fibonacci.**

Sea la sucesión

$$\{f_n\}, \text{ donde } f_1 = 1, \quad f_2 = 1 \text{ y } f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3$$

Hallar algunos de los primeros términos.

Solución

Tenemos:

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2 \qquad f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$$

$$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5 \qquad f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$$

$$f_7 = f_6 + f_5 = 8 + 5 = 13 \qquad f_8 = f_7 + f_6 = 13 + 8 = 21$$

$$f_9 = f_8 + f_7 = 21 + 13 = 34 \qquad f_{10} = f_9 + f_8 = 34 + 21 = 55$$

$$f_{11} = f_{10} + f_9 = 55 + 34 = 89 \qquad f_{12} = f_{11} + f_{10} = 89 + 55 = 144$$

Así, los 12 primeros términos de esta sucesión son;

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, . . .

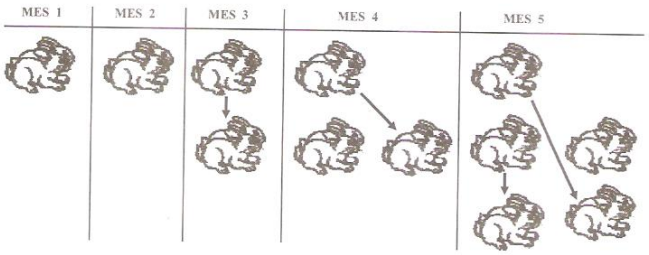
Observar que en este ejemplo no se pidió hallar una fórmula explícita de la sucesión. Esto se debe que tal fórmula no es fácil de encontrarla. De hecho, esta fue hallada más de años después que Fibonacci la planteo en 1.202. La manera de resolver este tipo de sucesiones será la materia que veremos a continuación.

¿SABIAS QUE . . .

Fibonacci

FIBONACCI (1.180–1.228) *es el apodo con que se le conocía a* ***Leonardo de Pisa****. Fibonacci proviene de filius Bonacci, que significa "hijo de Bonacci". Nació en la ciudad italiana de Pisa. Se dedicó al comercio, razón por la cual viajaba con frecuencia por el Oriente Medio, donde tuvo contacto con matemáticos árabes. En 1.202 publicó su libro* ***Liber Abaci,*** *en el cual presenta al mundo europeo la notación arábica para los números, así como algunos algoritmos para la aritmética. En este libro también aparece su famoso problema de los conejos, del cual surge la sucesión que ahora lleva su nombre.*

El problema de los conejos dice así: En una isla paradisíaca, donde no hay enfermedades ni depredadores, se deja una pareja de conejos recién nacidos (hembra y macho). Se sabe que una pareja de conejos recién nacidos requiere un mes de maduración, durante el cual no se reproduce, pero al finalizar el segundo mes da a luz una nueva pareja, y luego sigue pariendo mensualmente otra pareja. Averiguar ¿Cuántas parejas de conejos habrá en la isla después de un año?



Sea f_n el número de parejas de conejos después de n meses. Después del primer mes, el número de parejas de conejos en la isla es $f_1 = 1$. Como esta pareja no se reproduce durante el segundo mes, tenemos también que $f_2 = 1$. En el mes 3 tenemos una pareja que teníamos el mes anterior más 1 pareja de recién nacidos. Esto es, $f_3 = f_2 + 1 = 1 + 1 = 2$.

Para hallar el número de parejas después del mes n, se deben sumar el número de parejas del mes previo, f_{n-1}, con el número de parejas recién nacidas, que es f_{n-2}. Esto es,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

En el ejemplo anterior vimos que $f_{12} = 144$, lo que nos indica que después de un año la población de conejos en la isla es de 144 parejas.

RELACIONES DE RECURRENCIA

Si se tiene una definición recursiva de una sucesión y se busca una solución explícita, la fórmula recursiva es llamada relación recursiva. En términos más concretos, tenemos la siguiente definición.

DEFINICION Una **relación recursiva** para una sucesión $\{a_n\}$ es una ecuación que expresa a_n en términos de uno o más de los términos previos:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}.$$

Una sucesión es llamada **solución de una relación de recurrencia** si los términos de la sucesión satisfacen la relación de recurrencia.

EJEMPLO 8 Sea la relación de recurrencia: $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$

Determinar si las siguientes sucesiones son soluciones de esta relación de recurrencia.

1. $\{a_n\}$, donde $a_n = 3n$ **2.** $\{a_n\}$, donde $a_n = 4$

3. $\{a_n\}$, donde $a_n = 3n + 4$ **4.** $\{a_n\}$, donde $a_n = 3^n$

Solución

1. Reemplazando $a_n = 3n$ en la relación de recurrencia:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3(n-1)) - 3(n-2) = 6n - 6 - 3n + 6 = 3n = a_n$$

Por lo tanto, $\{a_n\}$, donde $a_n = 3n$, sí es una solución.

2. Reemplazando $a_n = 4$ en la relación de recurrencia:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(4) - 4 = 4 = a_n$$

Por lo tanto, $\{a_n\}$, donde $a_n = 4$, también es una solución.

3. Reemplazando $a_n = 3n + 4$ en la relación de recurrencia:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)+4] - [3(n-2)+4]$$
$$= 6n - 6 + 8 - 3n + 6 - 4 = 3n + 4 = a_n$$

Por lo tanto, $\{a_n\}$, donde $a_n = 3n + 4$, también es una solución.

4. Reemplazando $a_n = 3^n$ en la relación de recurrencia:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3^{n-1}) - 3^{n-2} = 6(3^{n-2}) - 3^{n-2} = 5(3^{n-2}) \neq a_n$$

Por lo tanto, $\{a_n\}$, donde $a_n = 3^n$, no es una solución.

Este ejemplo nos dice que una relación de recurrencia puede tener varias soluciones.

CONDICIONES INICIALES

Recordar que una sucesión definida recursivamente, además de la relación de recurrencia, se deben dar los términos iniciales. A estos términos iniciales se les llama también **condiciones iniciales**. Así, en la sucesión de Fibonacci, las condiciones iniciales son $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$.

RESOLUCION POR ITERACION

Un método que surge naturalmente para resolver una relación de recurrencia, es el **método de iteración.** Este consiste en regresar hacia atrás en la sucesión, mediante la relación de recurrencia, hasta llegar a las condiciones iniciales.

EJEMPLO 9 Resolver la relación de equivalencia

$$s_n = 5s_{n-1},$$

sujeta a la condición inicial

$$s_0 = 7$$

Solución

$$s_n = 5s_{n-1} = 5(5s_{n-2}) = 5^2 s_{n-2} = \ldots = 5^n s_0 = 5^n(7) = 7\times 5^n$$

Esto es, $s_n = 7\times 5^n$

Siguiendo los mismos pasos seguidos en la solución del ejemplo anterior se demuestra el siguiente teorema.

TEOREMA 7.11 La relación de recurrencia

$a_n = ra_{n-1}$, donde r es una contante,

sujeta a la condición inicial $a_0 = k$

tiene una única solución y está dada por

$$a_n = kr^n, \quad n \geq 0$$

EJEMPLO 10 Hallar la solución de la relación de recurrencia

$$a_n = 6a_{n-1}, \text{ sabiendo que } a_2 = 108$$

Solución

De acuerdo al teorema anterior,

$$a_n = k \times 6^n, \text{ donde } k = a_0$$

Hallemos k.

Tenemos que $a_2 = 108$ y , por la relación de recurrencia, $a_2 = 6^2 a_0$. Luego,

$$6^2 a_0 = 108 \Rightarrow a_0 = 108/6^2 = 3 \Rightarrow k = 3$$

Por lo tanto, la solución buscada es

$$a_n = 3 \times 6^n$$

EJEMPLO 11 Hallar una fórmula explícita para b_n si se cumple que

$$b_n = 2b_{n-1} + 1,$$

con la condición inicial $b_1 = 1$

Solución

$$\begin{aligned} b_n &= 2b_{n-1} + 1 = 2(2b_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 b_{n-2} + 2 + 1 = 2^2(2b_{n-3} + 1) + 2 + 1 \\ &= 2^3 b_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 = \ldots \\ &= 2^{n-1} b_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 \end{aligned}$$

Si $S = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1$,

entonces S es la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.

Aplicando la fórmula: $1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} = \dfrac{a^n - 1}{a - 1}$

se obtiene que $S = \dfrac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$

Por lo tanto, regresando a la igualdad inicial, tenemos

$$b_n = 2^n - 1$$

,

ır

ıncia

$= 6^2 a_0$. Luego,

ımple que

$_{n-3}+1) + 2 + 1$

sión geométrica.

RELACIONES HOMOGENEAS LINNEALES

El método de iteración no siempre funciona. Ahora introducimos una nueva técnica para resolver relaciones de recurrencia **homogéneas y lineales**.

El concepto **lineal** significa que cada término con subíndice, aparece elevado a la primera potencia. Así la relación siguiente es lineal:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + f(n),$$

donde c_1 y c_2 son constantes y $f(n)$ es una función con dominio el conjunto $\mathbb{N}$.

Si en la relación anterior se tiene que $f(n) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la relación es, además, **homogénea**.

DEFINICION Una relación de recurrencia se dice que es **homogénea lineal de orden k con coeficientes constantes** si es de la forma:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \ldots + c_k a_{n-k},$$

donde $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$ son constantes reales y $c_k \neq 0$.

EJEMPLO 12 Se tiene que:

1. La relación de Fibonacci: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ es lineal homogénea de grado 2 con coeficientes constantes.

2. La relación $a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-4}$ es lineal homogénea de grado 4 con coeficientes constantes. El grado igual a 4 se ve claramente si esta relación la escribimos así:
$$a_n = 3a_{n-1} + 0a_{n-2} + 0a_{n-3} + 2a_{n-4}.$$

3. La relación $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$ es homogénea de grado 2 con coeficientes constantes, pero no es lineal.

4. La relación $b_n = nb_{n-1}$ es lineal homogénea de grado 1, pero no tiene coeficientes constantes.

5. La relación $H_n = 2H_{n-1} + 1$ es lineal de grado 1 con coeficientes constantes, pero no es homogénea.

Por razones de simplicidad, nos concentramos solamente en las relaciones de recurrencia lineales homogéneas de grado 2 con coeficiente constantes. Esto es, relaciones del tipo:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

A esta relación le asignamos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$x^2 - c_1 x - c_2 = 0,$$

que recibe el nombre de **ecuación característica** de la relación de recurrencia dada.

A las raíces de esta ecuación las llamaremos **raíces características** de la relación.

Las raíces características nos proporcionan la solución de la relación de recurrencia., en la forma que indica el siguiente teorema.

TEOREMA 7.12 *Sea la relación de recurrencia*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \qquad \textbf{(i)}$$

con su correspondiente ecuación característica,

$$x^2 - c_1 x - c_2 = 0. \qquad \textbf{(ii)}$$

1. Si la ecuación característica tiene dos raíces distintas, r_1 y r_2, entonces

   $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$, donde α y β son constantes,

   es la fórmula explícita para la sucesión.

2. Si la ecuación característica tiene una sola raíz r ($r_1 = r_2 = r$), entonces

   $a_n = \alpha r^n + \beta n r^n$, donde α y β son constantes, q

   es la fórmula explícita para la sucesión.

Demostración

1. Debemos probar que $a_n = \alpha\, r_1^n + \beta r_2^n$ satisface la relación recursiva.

   Observar que por ser r_1 y r_2 raíces de la ecuación característica, se cumple que:

$$\textbf{(3)} \quad r_1^2 = c_1 r_1 + c_2 \qquad \textbf{(4)} \quad r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$$

Ahora,

$$a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n = \alpha r_1^{n-2} r_1^2 + \beta r_2^{n-2} r_2^2$$

$$= \alpha r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \beta r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \qquad \text{(De (3) y de (4))}$$

$$= [c_1 \alpha r_1^{n-1} + c_2 \alpha r_1^{n-2}] + [c_1 \beta r_2^{n-1} + c_2 \beta r_2^{n-2}]$$

$$= [c_1 \alpha r_1^{n-1} + c_1 \beta r_2^{n-1}] + [c_2 \alpha r_1^{n-2} + c_2 \beta r_2^{n-2}] \qquad \text{(Asociando y conmutando)}$$

$$= c_1[\alpha r_1^{n-1} + \beta r_2^{n-1}] + c_2[\alpha r_1^{n-2} + \beta r_2^{n-2}]$$

$$= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \qquad \text{(De (1), para } n-1 \text{ y } n-2\text{).}$$

2. Similar a la prueba de 1.

EJEMPLO 13 Resolver la relación de recurrencia

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \text{ con condiciones iniciales } a_0 = 9 \text{ y } a_1 = 3.$$

Solución

cterísticas de la relación.

lución de la relación de

acterística,

os raíces distintas, r_1 y r_2,

y β son constantes,
in.

na sola raíz r ($r_1 = r_2 = r$),

α y β son constantes, q
n.

ación recursiva.

terística, se cumple que:

$c_1 r_2 + c_2$

e (3) y de (4))

ciando y conmutando)

(1), para $n-1$ y $n-2$).

---

iales $a_0 = 9$ y $a_1 = 3$.

La relación dada es homogénea lineal de orden 2 con coeficientes constantes. En consecuencia, podemos utilizar el teorema anterior.

La ecuación característica correspondiente es $x^2 - x - 2 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = -1$.

Por la parte 1 del teorema, la solución es la sucesión $\{a_n\}$, donde

$$a_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$$

Debemos hallar el valor de los coeficientes α y β.

De las condiciones iniciales se sigue que

$$9 = a_0 = \alpha 2^0 + \beta(-1)^0 \quad \text{y} \quad 3 = a_1 = \alpha 2^1 + \beta(-1)^1$$

y tenemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \alpha + \beta = 9 \\ 2\alpha - \beta = 3 \end{cases}$ cuya solución es $\alpha = 4$ y $\beta = 5$.

Por lo tanto, la solución de la relación de recurrencia es la sucesión $\{a_n\}$, donde

$$a_n = 4 \times 2^n + 5(-1)^n$$

EJEMPLO 14 Resolver la relación de recurrencia

$b_n = 6b_{n-1} - 9b_{n-2}$, con condiciones iniciales $b_0 = 5$ y $a_1 = 6$.

Solución

La relación dada es homogénea lineal de orden 2 con coeficientes constantes. En consecuencia, podemos utilizar el teorema anterior.

La ecuación característica correspondiente es $x^2 - 6x + 9 = 0$, la cual tiene sus dos raíces iguales $r = r_1 = r_2 = 3$.

Por la parte 2 del teorema, la solución es la sucesión $\{b_n\}$, donde

$$b_n = \alpha 3^n + \beta n 3^n$$

Debemos hallar el valor de los coeficientes α y β.

De las condiciones iniciales se sigue que

$$5 = b_0 = \alpha 3^0 + \beta n 3^0 \quad \text{y} \quad 6 = b_1 = \alpha 3^1 + \beta(1)3^1$$

y tenemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \alpha = 5 \\ 3\alpha + 3\beta = 6 \end{cases}$ con solución $\alpha = 5$ y $\beta = -3$.

Por lo tanto, la solución de la relación de recurrencia es la sucesión $\{b_n\}$, donde

$$b_n = 5 \times 3^n + (-3n)3^n = 5 \times 3^n - n \times 3^{n-1}$$

PROBLEMAS RESUELTOS 7.4

PROBLEMA 1 Hallar una fórmula explícita para la siguiente relación de recurrencia:

$$(a_n)^2 = 3(a_{n-1})^2 \text{ , donde } a_0 = 7 \text{ y } a_n > 0, \forall\, n \geq 1$$

Solución

Si hacemos $b_n = (a_n)^2$, tenemos:

$$b_n = 3b_{n-1}\,, \forall\, n \geq 1 \quad \text{y} \quad b_0 = 7^2$$

Por iteración obtenemos que

$$b_n = 3b_{n-1} = \ldots = 3^n b_0 = 7^2 \times 3^n$$

y, por lo tanto,

$$a_n = \sqrt{7^2 \times 3^2} = 7\left(\sqrt{3}\right)^n$$

PROBLEMA 2 Hallar una fórmula explícita para la sucesión de Fibonacci:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\text{, con condiciones iniciales } f_1 = 1 \text{ y } f_2 = 1.$$

Solución

La relación dada es homogénea lineal de orden 2 con coeficientes constantes. Su ecuación característica es

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

cuyas raíces son:

$$r_1 = (1-\sqrt{5})/2 \quad \text{y} \quad r_2 = (1+\sqrt{5})/2\,.$$

Por la parte 1 del teorema, la solución es la sucesión $\{f_n\}$, donde

$$f_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Debemos hallar el valor de los coeficientes α y β. De las condiciones iniciales se sigue que

$$\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \quad \text{y} \quad \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$$

Este sistema tiene por solución $\alpha = -1/\sqrt{5}$ y $\beta = 1/\sqrt{5}$.

OS 7.4

a siguiente relación de

y $a_n > 0, \forall\, n \geq 1$

ión de Fibonacci:

les $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$.

icientes constantes. Su

onde

ondiciones iniciales se

$$+ \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$$

5 .

Luego, la fórmula explícita de la sucesión de Fibonacci es

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 7.4

En los problemas del 1 al 6, hallar una relación de recurrencia a la cual satisfaga la sucesión dada.

1. $a_n = 2n$ **2.** $b_n = 2n + 3$ **3.** $c_n = 7^n$

4. $d_n = n^2$ **5.** $e_n = n^2 + n$ **6.** $a_n = n + (-1)^n$

En cada problema del 7 al 13 se da una relación de recurrencia con una condición inicial. Mediante la técnica de iteración, hallar una fórmula explícita para cada relación.

7. $a_n = 1.5a_{n-1}, \quad a_1 = 4$ **8.** $b_n = 5b_{n-1} + 4, \quad b_1 = 2$

9. $d_n = d_{n-1} + n, \quad d_1 = 4$ **10.** $c_n = -1{,}5c_{n-1}, \quad c_1 = 9$

11. $a_n = na_{n-1}, \quad a_1 = 8$ **12.** $b_n = b_{n-1} + 1 + 2^{n-1}, \quad b_0 = 0$

13. $g_n = g_{n-1} - 2, \quad g_1 = 0$

En los problemas del 14 al 21, indicar si la relación de recurrencia dada es homogénea lineal con coeficientes constantes. En caso afirmativo indicar su grado.

14. $a_n = -12a_{n-1}$ **15.** $b_n = 3nb_{n-1}$

16. $c_n = 3nc_{n-2} - c_{n-1}$ **17.** $d_n = d_{n-1} + n$

18. $c_n = 3c_{n-2} - c_{n-3}$ **19.** $a_n = (\log n)a_{n-1} - a_{n-2}$

20. $b_n = -b_{n-1} + 3b_{n-2} - 5b_{n-3}$ **21.** $\sqrt{c_n} = \sqrt{c_{n-1}} + 2\sqrt{c_{n-2}}$

En los problemas del 22 al 28, resolver la relación de recurrencia dada

22. $b_n = 4b_{n-1} + 5b_{n-2}, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 9$

23. $a_n = -3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 4$

24. $c_n = -6c_{n-1} - 9c_{n-2}, \quad c_1 = 9, \quad c_2 = -9$

25. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = 8$

26. $b_n = 2b_{n-2}$, $\quad b_1 = \sqrt{2}$, $b_2 = 6$

27. $\sqrt{c_n} = \sqrt{c_{n-1}} + 2\sqrt{c_{n-2}}$, $c_0 = 1 = c_1$. Sugerencia: hacer $a_n = \sqrt{c_n}$.

28. $2a_n = 7a_{n-1} - 3a_{n-2}$, $\quad a_0 = 1$, $a_1 = 1$

29. Hallar una fórmula explícita para la relación de recurrencia

$$a_n = ra_{n-1} + h,$$

donde r y h son constantes.

30. Se abre una cuenta de ahorros en un banco que ofrece el 12% de interés compuesto anual.

a. Establecer una relación de recurrencia para el depósito al término de n años.

b. Hallar una fórmula explícita para la cuenta si ésta se abrió con 10.000 Bs.

31. El número de bacterias de una colonia se triplica cada hora.

a. Establecer una relación de recurrencia para el número de bacterias al término de n horas.

b. Hallar una fórmula explícita para el número de bacterias de la colonia si ésta se inició con 100.

32. Se sabe que la población del mundo en el año 2.000 fue de 6,000 millones de habitantes, y que ésta está creciendo a razón de 1,3% anual.

a. Establecer una relación de recurrencia para la población del mundo al término de n años después del 2.000.

b. Hallar una fórmula explícita para la población del mundo al término de n años después del 2.000.

c. ¿Cuál será la población del mundo en el año 2.050?

:er $a_n = \sqrt{c_n}$.

:ia

ece el 12% de interés

al término de n años.

ɔrió con 10.000 Bs.

'a.

nero de bacterias al

as de la colonia si ésta

de 6,000 millones de
l.

lación del mundo al

undo al término de n

8

OPERACIONES

NIELS HENRIK ABEL
(1.802-1.829)

EVARISTE GALOIS
(1,811-1.832)

8.1 OPERACIONES BINARIAS

8.2 ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

NIELS HENRIK ABEL
(1.802-1.829)

EVARISTE GALOIS
(1,811-1.832)

NIELS HENRIK ABEL Y EVARISTE GALOIS *son dos de los más geniales matemáticos que ha producido la humanidad. Sus vidas fueron muy cortas, 27 años el primero y 21 años el segundo. Sin embargo, sus aportes han marcado hitos en el desarrollo de la matemática moderna. Galois nos dejó la teoría de grupos, la cual invade todas Las ramas de la matemática y algunas de la física. Abel solucionó un famoso problema que desafió por muchos años a las mentes más claras de la matemática. Probó que no existe una fórmula algebraica que nos dé las soluciones de una ecuación de quinto grado.*

Abel *nació en la isla de Finnoy condado de Nogaland, Noruega, el 5 de agosto de 1.802 . Su padre fue pastor de una comunidad, de condiciones económicas humildes y poseía una familia numerosa. La estrechez de medios de subsistencia acompañó a Abel durante toda su vida. Muere en 1.829, acosado por una enfermedad causada por su deficiencia alimenticia.*

Galois *nació en Bourg-la Reine, un suburbio de París, el 25 de octubre de 1.811. Fue un joven muy inquieto con abiertas convicciones republicanas, por las cuales sufrió prisión. Francia, para ese entonces, vivía la era postnapoleónica. Se dice que por intrigas femeninas, Galois se enredó en un duelo a pistola. Muere, "en el campo de honor", a consecuencia de un certero disparo de su adversario, el 31 de mayo de 1.832, a la edad de 21 años. La noche anterior, conciente que moriría en el duelo, escribió apresuradamente sus últimas meditaciones sobre la teoría de grupos. Estas resultaron ser geniales aportaciones para la posteridad.*

ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

Los años en que vivieron estos brillantes matemáticos, desde 1.802 a 1.832, coinciden prácticamente con la gesta independentista latinoamericana.

SECCION 8.1
OPERACIONES BINARIAS

La operación binaria más conocida es, sin duda, la adición de números naturales. Esta operación asigna a cada par ordenado $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ un único número $z \in \mathbb{N}$ tal que $x + y = z$. Pero esto significa que la adición de números naturales es la función:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{tal que, } f(x, y) = x + y$$

Esta observación nos guiará para presentar el concepto de operación binaria.

DEFINICION Sea A un conjunto no vacío. Una **operación binaria** en A es una función

$$f : A \times A \to A$$

NOTACION Para representar operaciones, es costumbre usar los símbolos $*$, $\perp$, etc., en lugar de las letras f, g, h, etc., que se utilizan para expresar funciones. De este modo:

$$* \text{ es una operación binaria en } A \iff * : A \times A \to A$$

Se acostumbra escribir el signo de la operación al medio de los dos elementos. Es decir, el valor $*(x, y)$ se escribe así: $x * y$. Esto es,

$$*(x, y) = x * y$$

La expresión $x * y$ se lee **"x es operado por y".**

EJEMPLO 1 La **adición** y la **multiplicación** son operaciones binarias, tanto en $\mathbb{N}$ como en $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, donde $\mathbb{C}$ es el conjunto de los números complejos.

EJEMPLO 2 La sustracción (o resta) es una operación binaria en $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$; pero no lo es en $\mathbb{N}$, ya que la diferencia de dos números naturales no siempre es otro número natural.

EJEMPLO 3 La división no es una operación binaria en $\mathbb{Z}$, ya que el cociente $\dfrac{a}{b}$ de dos enteros no siempre es otro entero.

La división tampoco es una operación binaria en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, ya que $\frac{a}{b}$ no está definida si $b = 0$. En cambio, la división sí es una operación binaria en cada uno de los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}, \quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}, \quad \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$$

EJEMPLO 4 La siguiente función es una operación binaria en $\mathbb{Z}$:

$$* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$a * b = a + b - ab$$

EJEMPLO 5 Sea U un conjunto. La unión e intersección son operaciones binarias en $\wp(U)$:

$$\bigcup : \wp(U) \times \wp(U) \to \wp(U), \qquad \bigcap : \wp(U) \times \wp(U) \to \wp(U)$$
$$(A, B) \to A \bigcup B \qquad\qquad (A, B) \to A \bigcap B$$

La **diferencia de conjuntos** y la **diferencia simétrica** también son operaciones binarias en $\wp(U)$.

EJEMPLO 6 Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de las proporciones. La conjunción y la disyunción son operaciones binarias en $\mathcal{P}$:

$$\wedge : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P} \qquad\qquad \vee : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$
$$(p, q) \to p \wedge q \qquad\qquad (p, q) \to p \vee q$$

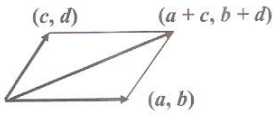
EJEMPLO 7 Sea A un conjunto y $\mathsf{F}(A)$ un conjunto formado por todas las funciones $f : A \to A$. La composición de funciones es una operación binaria en $\mathsf{F}(A)$:

$$\circ : \mathsf{F}(A) \times \mathsf{F}(A) \to \mathsf{F}(A)$$
$$(f, g) \to f \circ g$$

EJEMPLO 8 En $\mathbb{R}^2$ la siguiente operación binaria es llamada la adición de pares:

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$((a, b), (c, d)) \to (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Si a los elementos de $\mathbb{R}^2$ lo representamos mediante segmentos dirigidos (flechas), esta operación corresponde a la conocida regla de la diagonal del paralelogramo.



EJEMPLO 9 Una operación binaria en un conjunto finito puede definirse mediante una tabla (análoga a la tabla pitagórica). Así, la siguiente tabla define una operación binaria en el conjunto $A = \{ a, b, c \}$:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Según esta tabla se tiene que:

$a * a = a, \qquad a * b = b, \quad a * c = c, \; b * a = b, \quad b * b = c,$ etc.

ASOCIATIVIDAD

DEFINICION Una operación binaria $*$ en A es **asociativa** si y sólo si

$$a * (b * c) = (a * b) * c, \; \forall \; a, b, c, \in A$$

EJEMPLO 10 La adición y multiplicación en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ son asociativas. La unión, intersección, diferencia simétrica, definidas en $\wp(U)$ (ejemplo 5), también son asociativas. Así mismo, la composición de funciones (ejemplo 7).

EJEMPLO 11 La sustracción en $\mathbb{Z}$ no es asociativa. En efecto, tenemos que:

$$3 - (5 - 9) = 3 - (-4) = 7, \qquad (3 - 5) - 9 = -2 - 9 = -11$$

Luego, $\qquad 3 - (5 - 9) \neq (3 - 5) - 9$

CONMUTATIVIDAD

DEFINICION Una operación binaria $*$ en A es **conmutativa** si y sólo si

$$a * b = b * a, \; \forall \; a, b \in A$$

EJEMPLO 12 La adición y multiplicación en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, son conmutativas. También lo son la unión, intersección y diferencia simétrica en $\wp(U)$.

EJEMPLO 13 Si $\#A > 1$ y $\mathsf{F}(A)$ es el conjunto de funciones $f : A \to A$, entonces la composición de funciones en $\mathsf{F}(A)$ no es conmutativa. En efecto, si $a, b \in A$ y $a \neq b$, tenemos las funciones constantes:

$$f : A \to A \qquad\qquad g : A \to A$$

$$f(x) = a,\ \forall\, x \in A \qquad\qquad g(x) = b,\ \forall\, x \in A$$

Ahora,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(a) = b, \qquad (f \circ g)(a) = f(g(a) = f(b) = a$$

Esto es,

$$(g \circ f)(a) = b \neq a = (f \circ g)\,(a)$$

Luego, $g \circ f \neq f \circ g$.

EJEMPLO 14 Sean $\perp$ y $*$ las operaciones binarias definidas en $A = \{\, a, b, c \,\}$, por las siguientes tablas:

$\perp$	a	b	c
a	a	b	b
b	c	a	c
c	b	c	d

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

La operación $\perp$ no es conmutativa. En efecto, se tiene:

$$a \perp b = b \quad \text{y} \quad b \perp a = c$$

Se puede verificar paso a paso que la operación $*$ es conmutativa:

$$a * b = b * a, \qquad b * c = c * b, \text{ etc.,}$$

Un criterio más simple, el cual es fácil de ver, es el siguiente: Una operación definida por una tabla es conmutativa si y sólo si la tabla es simétrica respecto a la diagonal principal.

ELEMENTO IDENTIDAD O NEUTRO

DEFINICION Sea $*$ una operación binaria en A. Un elemento $\mathbf{e} \in A$ es un **elemento identidad o elemento neutro** respecto a la operación $*$ sí y sólo si

$$e * a = a * e = a\,,\ \forall\, a \in A$$

EJEMPLO 15 **a.** $\mathbf{0} \in \mathbb{N}$ es un elemento identidad para la adición en $\mathbb{N}$:

$$0 + n = n + 0 = n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

b. $1 \in \mathbb{N}$ es un elemento identidad para la multiplicación en $\mathbb{N}$:

$$1 \,.\, n = n \,.\, 1 = n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

c. $\varnothing \in \wp(U)$ es un elemento identidad para la unión en $\wp(U)$:

$$\varnothing \cup X = X \cup \varnothing = X, \quad \forall X \in \wp(U)$$

d. $U \in \wp(U)$ es un elemento identidad para la intersección en $\wp(U)$:

$$U \cap X = X \cap U = X, \quad \forall X \in \wp(U)$$

e. La función identidad I_A es un elemento identidad para la composición de funciones en $\mathsf{F}(A)$, donde $\mathsf{F}(A)$ es el conjunto de funciones de A en A.

$$I_A \circ f = f \circ I_A = f, \quad \forall f \in \mathsf{F}(A).$$

El siguiente teorema nos dice que una operación binaria no puede tener más de un elemento neutro.

TEOREMA 8.1 Si una operación tiene un elemento identidad, entonces éste es único.

Demostración

Supongamos que e y e' son dos elementos identidad para la operación binaria $*$ definida en A.

Por ser e elemento identidad, se tiene que: $e * a = a, \quad \forall a \in A$

En particular para $a = e'$, se tiene: $e * e' = e'$ **(1)**

Por ser e' elemento identidad, se tiene que: $a * e' = a, \quad \forall a \in A$

En particular, para $a = e$, se tiene: $e * e' = e$ **(2)**

De (1) y (2) obtenemos que $e' = e$.

ELEMENTOS INVERTIBLES

DEFINICION Sea $*$ una operación binaria en el conjunto A que tiene elemento identidad $e \in A$. Un elemento $a \in A$ es **invertible** o **simetrizable** si existe un elemento $a' \in A$ tal que

$$\boldsymbol{a * a' = a' * a = e}$$

En este caso, se dice que $\boldsymbol{a'}$ es **inverso o simétrico** de $\boldsymbol{a}$.

EJEMPLO 16 **a.** En $\mathbb{N}$ sólo 0 es invertible respecto a la adición y sólo 1 es invertible respecto a la multiplicación.

b. Todo elemento $a \in \mathbb{Z}$ es invertible respecto a la adición, y el inverso de a es $-a$. En efecto:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

c. Todo número $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq 0$ es invertible respecto a la multiplicación, y el inverso de a es $a^{-1} = 1/a$. En efecto:

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

EJEMPLO 17 Consideremos $\mathsf{F}(A)$, el conjunto de funciones de A en A, y la composición de funciones. Los elementos simetrizables o invertibles de $\mathsf{F}(A)$ son las funciones biyectivas. En efecto, sabemos, por el teorema 7.2, que:

$f: A \to A$ es biyectiva $\Leftrightarrow$ $\exists$ la función inversa $f^{-1} : A \to A$,

y además,

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_A$$

TEOREMA 8.2 Sea $*$ una operación binaria en A que es asociativa y tiene elemento identidad. Si $a \in A$ tiene inverso, entonces éste es único.

Demostración

Supongamos que a' y a'' son ambos elementos inversos de a y que e es el elemento neutro. Tenemos que:

$$\begin{aligned} a'' &= a'' * e && (e \text{ es elemento identidad}) \\ &= a'' * (a * a') && (a' \text{ es inverso de } a) \\ &= (a'' * a) * a' && (\text{asociatividad}) \\ &= e * a' && (a'' \text{ es inverso de } a) \\ &= a' && (e \text{ es elemento neutro}) \end{aligned}$$

Esto es, $a'' = a'$.

NOTACION Siguiendo una costumbre generalizada, al elemento inverso del elemento $\boldsymbol{a}$ lo denotaremos con $\boldsymbol{a}^{-1}$. Es decir,

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}^{-1}$$

TEOREMA 8.3 Sea $*$ una operación binaria en A que es asociativa y tiene elemento neutro $\boldsymbol{e}$. Si $\boldsymbol{a} \in A$ es invertible, entonces su inverso $\boldsymbol{a}^{-1}$ también es invertible, y el inverso de $\boldsymbol{a}^{-1}$ (el inverso del inverso) es $\boldsymbol{a}$. Esto es,

$$(\boldsymbol{a}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{a}$$

Demostración

Por ser a^{-1} el inverso de a, se tiene:

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

Estas mismas igualdades nos dicen que $\boldsymbol{a^{-1}}$ es invertible y que un elemento inverso de $\boldsymbol{a^{-1}}$ es $\boldsymbol{a}$. Pero, el teorema anterior nos dice que el inverso es único. Luego,

$$(a^{-1})^{-1} = a.$$

TEOREMA 8.4 Sea $*$ una operación binaria en A que es asociativa y tiene elemento identidad e. Si a y b son invertibles, entonces $a * b$ también lo es, y

$$\boldsymbol{(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}}$$

Demostración

Tenemos que

$$\begin{aligned}
(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= (a * (b * b^{-1})) * a^{-1} && \text{(asociatividad)}\\
&= (a * e) * a^{-1} && (b^{-1} \text{ es el inverso de } b)\\
&= a * a^{-1} && (e \text{ es el elemento neutro})\\
&= e && (a^{-1} \text{ es el simétrico de } a)
\end{aligned}$$

En forma similar se prueba que:

$$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = e$$

Luego, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

DISTRIBUTIVIDAD

DEFINICION Sean $*$ y $\perp$ dos operaciones en un conjunto A. Se dice que:

1. $*$ es **distributiva por la izquierda** respecto a $\perp$ si

$$\boldsymbol{a * (b \perp c) = (a * b) \perp (a * c), \quad \forall\, a, b, c \in A}$$

2. $*$ es **distributiva por la derecha** respecto a $\perp$ si

$$\boldsymbol{(b \perp c) * a = (b * a) \perp (c * a), \quad \forall\, a, b, c, \in A}$$

3. $*$ es **distributiva** respecto a $\perp$ si $*$ es distributiva por la izquierda y por la derecha respecto a $\perp$.

Es claro que si la operación $*$ es conmutativa, para ser distributiva basta que ésta sea distributiva por un solo lado.

EJEMPLO 18 En $\mathbb{N}$, la multiplicación es distributiva respecto a la adición:

$$a.(b + c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c)$$

Sin embargo, la adición no es distributiva respecto a la multiplicación.

EJEMPLO 19 En $\wp(U)$, tanto la unión es distributiva respecto a la intersección y la intersección es distributiva respecto a la unión:

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

OBSERVACIONES :

1. Además de las operaciones binarias se tienen también operaciones **unitarias**, **ternarias**, etc. En general si n es un número natural, una **operación *n*-aria** en un conjunto A es una función: $f: A^n \to A$

   Un ejemplo de operación unitaria es la operación **complemento** en $\wp(U)$:

   $$f: \wp(U) \to \wp(U), \quad f(A) = \complement A$$

2. A las operaciones antes tratadas se las llama operaciones **internas**, debido a que siempre se opera con elementos de un solo conjunto. Pero, también existen operaciones en que intervienen elementos de dos conjuntos distintos. En este caso se tienen las operaciones **externas**. En forma más precisa: Sean K y A dos conjuntos distintos, una **operación** (unitaria) **externa en *A* con operadores en *K*** es una función.

   $$f: K \times A \to A$$

   Como ejemplo de este tipo de operaciones tenemos la multiplicación de números reales por pares ordenados de números reales (vectores):

   $$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(r, (a, b)) = r(a, b) = (ra, rb).$$

PROBLEMAS RESUELTOS 8.1

PROBLEMA 1 Dada la siguiente operación binaria en $\mathbb{Z}$:

$$* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$*(a, b) = a + b - ab$$

a. Probar que esta operación es asociativa, conmutativa y tiene elemento identidad.

b. Hallar todos los elementos invertibles.

Solución

a. Asociatividad.

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c - bc) \\ &= a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) \\ &= a + b + c - ab - ac - bc + abc \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a + b - ab) * c \\ &= (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c \\ &= a + b + c - ab - ac - bc + abc\end{aligned}$$

Luego, $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Conmutatividad

$$a * b = a + b - ab = b + a - ba = b * a$$

Elemento Identidad

0 es elemento identidad. En efecto:

$a * 0 = a + 0 - a0 = a$ y $0 * a = 0 + a = 0a = a$

b. Elementos invertibles

Sea $a \in \mathbb{Z}$ un elemento invertible con inverso $a^{-1} \in \mathbb{Z}$. Se tiene que,

$$a * a^{-1} = 0 \Leftrightarrow a + a^{-1} - aa^{-1} = 0 \Leftrightarrow a^{-1} - aa^{-1} = -a$$

$$\Leftrightarrow a^{-1}(1 - a) = -a \Rightarrow a^{-1} = \frac{a}{a-1}$$

El número a^{-1} tiene que ser entero. Est sucede sólo cuando el numerador a debe ser 0 ó el denominador $a - 1$ debe ser 1 ó -1. Esto es,

$$a = 0 \quad \text{ó} \quad a - 1 = 1 \quad \text{ó} \quad a - 1 = -1$$

De donde obtenemos que $a = 0$ ó $a = 2$.

Luego, los únicos elementos invertibles son 0 y 2. Además, el inverso de $a = 0$ es $a^{-1} = 0$, y el inverso de $a = 2$ es $a^{-1} = 2$.

PROBLEMA 2 Sea $*$ una operación binaria en A. Se dice que un elemento $\boldsymbol{a}$ de A es **regular** respecto a la operación $*$ si se cumplen las dos siguientes condiciones cancelación a la izquierda y a la derecha):

1. $\boldsymbol{a * x = a * y \Rightarrow x = y}$ **2.** $\boldsymbol{x * a = y * a \Rightarrow x = y}$

Probar que todo elemento invertible es regular.

Solución

Supongamos que a es invertible y sea a^{-1} su inverso.

1. $a * x = a * y \Rightarrow a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * (a * y) \Rightarrow (a^{-1} * a) * x = (a^{-1} * a) * y$

$\Rightarrow e * x = e * y \Rightarrow x = y$

2. Se procede en forma similar a 1.

Observarse que el recíproco de la proposición anterior no se cumple. En efecto, en $\mathbb{N}$ con la multiplicación, todo elemento de $\mathbb{N}$ es regular, pero sólo 1 es invertible.

PROBLEMAS PROPUESTOS 8.1

1. Dadas las siguientes operaciones binarias

a. $a * b = 2a + b$ en $\mathbb{Z}$ **b.** $a * b = ab + 4$ en $\mathbb{Z}$

c. $a * b = a^2 + b$ en $\mathbb{Z}$ **d.** $a \perp b = \dfrac{a+b}{2}$ en $\mathbb{R}$

e. $a \perp b = |a - b|$ en $\mathbb{N}$ **f.** $a * b = a^b$ en $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

g. $a \perp b = \dfrac{a}{b}$ en $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ **h.** $a \perp b = 2ab$ en $\mathbb{R}$

¿Cuáles son asociativas?. ¿Cuáles son conmutativas?. ¿Cuáles tienen elemento. identidad y, en caso de tenerlo, cuál es éste?

2. Las tablas siguientes definen 5 operaciones binarias en $A = \{ 0, 1 \}$

a)

	0	1
0	0	0
1	0	1

b)

	0	1
0	0	0
1	1	1

c)

	0	1
0	0	1
1	1	1

d)

	0	1
0	0	1
1	0	0

e)

	0	1
0	1	0
1	0	1

¿Cuáles son asociativas?. ¿Cuáles son conmutativas?. ¿Cuáles tienen elemento identidad?

3. En $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ se tienen las siguientes dos operaciones:

a. $x * y = r$, donde $r \in A$ es el resto de la división $\dfrac{x+y}{5}$.

b. $x \perp y = r$, donde $r \in A$ es el resto de la división $\dfrac{x.y}{5}$

Construir sus respectivas tablas y determinar las propiedades de cada una.

4. En $A = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 12 \}$ definimos la siguiente operación:

$$a * b = \text{M C D } \{a, b\}$$

Construir la tabla de esta operación y determinar sus propiedades.

5. En $\mathbb{N}$ definimos la siguiente operación binaria:

$$a \wedge b = \text{Min } \{a, b\}$$

Probar que esta operación es asociativa, conmutativa, y no tiene elemento identidad.

6. En $\mathbb{N}$ definimos la siguiente operación binaria:

$$a \vee b = \text{Max } \{a, b\}$$

Probar que esta operación es asociativa, conmutativa, tiene elemento identidad y que 0 es el único elemento invertible.

7. Sea $*$ una operación binaria en A que es asociativa y conmutativa.
Probar que $\forall a, b, c, d \in A$ se cumple que

i. $a * (b * c) = b * (a * c)$

ii. $(a * b) * (c * d) = [(d * c) * a] * b$

8. Sea $*$ una operación binaria en A que tiene elemento identidad. Si se cumple que

$$(a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d), \quad \forall a, b, c, d \in A,$$

Probar que esta operación es asociativa y conmutativa.

9. En $\mathbb{N}$ se tienen las dos operaciones siguientes:

(1) $a * b = a + 2b$ **(2)** $a \perp b = 2ab$

Probar que $\perp$ es distributiva respecto a $*$.

10. Determinar el número de operaciones binarias que se pueden definir en un conjunto A si:

a. $\#A = 1$ **b.** $\#A = 2$ **c.** $\#A = 3$ **d.** $\#A = n$

11. Determinar el número de operaciones binarias conmutativas que pueden definirse en un conjunto A si:

a. $\#A = 1$ **b.** $\#B = 2$ **c.** $\#A = 3$

SECCION 8.2

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Todos nosotros hemos oído hablar del **sistema de los números naturales.** Se usa esta frase para identificar al conjunto $\mathbb{N}$ provisto de las operaciones de adición y multiplicación; es decir, para identificar a los cuatro objetos $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$. Este cuádruple es un ejemplo de un sistema algebraico. En general, un **sistema algebraico** es un conjunto A provisto de operaciones o relaciones definidas en A.

Se acostumbra denotar un sistema algebraico escribiendo entre paréntesis el conjunto, las operaciones y las relaciones.

Las propiedades de las operaciones de un sistema algebraico, le dan a éste una **estructura algebraica** de una especie determinada. Las estructuras algebraicas más conocidas son las estructuras de **semigrupo**, **grupo**, **anillo**, **campo**, **módulo**, **espacio vectorial**, etc. **El álgebra** es la rama de la matemática que estudia sistemáticamente las estructuras algebraicas. El álgebra se interesa primordialmente por las propiedades de las operaciones.

Esta sección la dedicaremos a estudiar, en forma breve, las estructuras de semigrupo, grupo, anillo, campo y álgebra de Boole.

SEMIGRUPO

DEFINICION Un sistema algebraico $(A, *)$, donde $*$ es una operación binaria en A, es un **semigrupo** si la operación $*$ es asociativa.

Si además la operación $*$ es conmutativa, se dice que el **semigrupo es conmutativo**.

Un semigrupo puede o no tener un elemento identidad.

EJEMPLO 1 Son semigrupos conmutativos con elemento identidad 0:

$$(\mathbb{N}, +),\ (\mathbb{Z}, +),\ (\mathbb{Q}, +),\ (\mathbb{R}, +),\ (\mathbb{C}, +)$$

EJEMPLO 2 Son semigrupos conmutativos con elemento identidad 1:

$$(\mathbb{N}, .),\ (\mathbb{Z}, .),\ (\mathbb{Q}, .),\ (\mathbb{R}, .),\ (\mathbb{C}, .)$$

EJEMPLO 3 Si $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, entonces $(\mathbb{N}^*, .)$, $(\mathbb{Z}^*, .)$, $(\mathbb{Q}^*, .)$, $(\mathbb{R}^*, .)$, $(\mathbb{C}^*, .)$ son semigrupos conmutativos con elemento identidad 1.

EJEMPLO 4 Si $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$ son los naturales positivos, enteros positivos, racionales positivos y reales positivos, respectivamente, entonces

$$(\mathbb{N}^+, +),\ (\mathbb{Z}^+, +),\ (\mathbb{Q}^+, +),\ (\mathbb{R}^+, +)$$

son semigrupos conmutativos sin elemento identidad y

$$(\mathbb{N}^+, .),\ (\mathbb{Z}^+, .),\ (\mathbb{Q}^+, .),\ (\mathbb{R}^+, .)$$

son semigrupos conmutativos con elemento identidad 1.

EJEMPLO 5 Si A es un conjunto con dos ó más elementos y $\mathsf{F}(A)$ es el conjunto de funciones de A en A, entonces $(\mathsf{F}(A), \circ)$ es un semigrupo no conmutativo con elemento identidad la función I_A.

GRUPO

DEFINICION Un sistema algebraico $(G, *)$ es un **grupo** si $(G, *)$ es un semigrupo con elemento identidad y todo elemento de G es invertible.

En términos más precisos, **$(G, *)$ es un grupo** si se cumple que:

G_1. Asociatividad. $\quad a * (b * c) = (a * b) * c, \quad \forall a, b, c \in G$

G_2. Elemento neutro. $\exists\, e \in G$, tal que $a * e = e * a = a,\ \forall\, a \in G$

G_3. Elementos inversos. $\forall a \in G, \exists\, a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

El **grupo es abeliano o conmutativo** si, además, se cumple:

G_4. Conmutatividad. $a * b = b * a,\ \forall\, a, b \in G$

El término **abeliano** se ha escogido en honor al matemático **N. Abel.**

OBSERVACION En la definición de grupo, algunos autores agregan un axioma más, que le llama **clausura**. Este dice:

Si $a \in G$ y $b \in G$, entonces $(a * b) \in G$

Esta propiedad está implícita en la definición de operación. En efecto, $*$, por ser una operación, es una función de $G \times G$ en G. Por lo tanto, $a * b$ tiene que estar en G.

EJEMPLO 6 $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ son grupos abelianos.

EJEMPLO 7 $(\mathbb{Q}^*, .)$, $(\mathbb{R}^*, .)$, $(\mathbb{C}^*, .)$ son grupos abelianos.

EJEMPLO 8 Sea A un conjunto con 3 ó más elementos. Sea $\mathbb{B}(A)$ el conjunto formado por las funciones $f : A \to B$ biyectivas. Es fácil ver que la composición de funciones es una operación binaria en $\mathbb{B}(A)$ y que $(\mathbb{B}(A), \circ)$ es un grupo no abeliano.

EJEMPLO 9 $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo abeliano.

EJEMPLO 10 $(\wp(U), \Delta)$ es un grupo abeliano

En efecto, sabemos que la diferencia simétrica es asociativa, conmutativa y tiene elemento neutro, que es el conjunto vacío $\varnothing$. Además, para cualquier conjunto $A \in \wp(U)$ se tiene:

$$A \,\Delta\, A = \varnothing$$

Luego, todo elemento de $\wp(U)$ es invertible y su inverso es el mismo elemento.

EJEMPLO 11 Si $*$ es la operación binaria en el conjunto de los bits $B = \{ 0, 1 \}$ definida por la siguiente tabla, entonces $(B, *)$ es un grupo abeliano. Este grupo juega un papel fundamental en la ciencia de la computación.

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

EJEMPLO 12 Si $*$ es la operación binaria en $A = \{ e, a, b, c \}$ definida por la sigiuiente tabla, entonces $(A, *)$ es un grupo abeliano, llamado el **grupo de Klein.**

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

¿SABIAS QUE . . .

FELIX KLEIN (1.849-1.925) *matemático alemán, profesor de la Universidad de Erlanger. Logró clasificar a las geometrías elementales a través de sus grupos de transformaciones. Sus resultados son conocidos como* ***El Programa de Erlanger*** *y produjeron un tremendo impacto en el campo geométrico. Demostró que las* ***geometría euclideana*** *y las* ***geometrías no euclideanas*** *son casos particulares de* ***la geometría proyectiva.***

Felix Klein

EJEMPLO 13 En los ejemplos 8 y 10 del capítulo 6, hemos construido el conjunto $\mathbb{Z}_3$, de los enteros módulo 3:

$$\mathbb{Z}_3 = \{ [0], [1], [2] \}$$

Por razones de comodidad a las clases de equivalencia los denotaremos, por comodidad, así:

$$[0] = \bar{0}, \quad [1] = \bar{1}, \quad [2] = \bar{2}.$$

L siguiente tabla define la operación + en $\mathbb{Z}_3$,

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Con esta operación, $(\mathbb{Z}_3, +)$ es un grupo abeliano, llamado el **grupo de los enteros módulo 3**.

OBSERVACION La operación $+$ dada por la tabla para $\mathbb{Z}_3$ se puede definir mediante la adición de $\mathbb{Z}$ del modo siguiente:

$$[i] + [j] = [i + j].$$

Así, de este modo tenemos, por ejemplo,

$$[0] + [2] = [0 + 2] = [2], \quad [1] + [2] = [1 + 2] = [3] = [0],$$

$$[2] + [2] = [2 + 2] = [4] = [1], \text{ etc.}$$

El ejemplo anterior lo generalizamos a $\mathbb{Z}_n$, donde n es cualquier entero positivo. Como en la observación anterior, definimos la operación $+$ en $\mathbb{Z}_n$ del modo siguiente:

$$+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, \quad [i] + [j] = [i + j].$$

Este ejemplo es tan importante que lo presentamos como un teorema.

TEOREMA 8.5 $(\mathbb{Z}_n, +)$ es un grupo abeliano, llamado el **grupo de los enteros módulo n**.

Demostración

G_1. Asociatividad

$$[i] + ([j] + [k]) = [i] + [j + k] = [i + (j + k)] = [(i + j) + k)] = [i + j] + [k]$$

G_2. Elemento neutro

$\exists\, [0] \in \mathbb{Z}_n$, tal que $[i] + [0] = [i + 0] = [i]$ y $[0] + [i] = [0 + i] = [i]$

G_3. Elementos inversos

$\forall\, [i] \in \mathbb{Z}_n\ \exists\, [-i]$, tal que $[i] + [-i] = [i - i] = [0]$ y $[-i] + [i] = [-i + i] = [0]$

G_4. Conmutatividad.

$$[i] + [j] = [i + j] = [j + i] = [j] + [i]$$

La multiplicación en $\mathbb{Z}$, así como la adición, induce una multiplicación en $\mathbb{Z}_n$, del modo siguiente: $\bullet : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, \quad [i] \bullet [j] = [i \cdot j]$

TEOREMA 8.6 Si $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n - \{ [0] \}$, entonces

1. $(\mathbb{Z}_n, \bullet)$ es un semigrupo conmutativo con elemento identidad $[1]$.
2. $(\mathbb{Z}_n^*, \bullet)$ es un grupo conmutativo, si n es primo.

Demostración

1. La prueba de la asociatividad y conmutatividad de $\bullet$ sigue los mismos pasos que la prueba del teorema anterior para el caso de $+$. En cuanto al elemento identidad:

$$[1] \bullet [i] = [1 . i] = [i]$$

2. Para que $(\mathbb{Z}_n^*, \bullet)$ sea un grupo conmutativo, debido a la parte 1, sólo falta probar que cualquier elemento $[a] \in \mathbb{Z}_n^*$, es invertible.

Bien, como $[a] \neq [0]$, entonces a no es múltiplo de n. Además, como n es primo, entonces a y n son primos relativos. Ahora prestamos un resultado de la teoría de los números que nos asegura que, en este caso, existen números enteros b y m tales que

$$ab + mn = 1$$

Esta igualdad, llevada a clases de equivalencia, nos dice que

$$[ab] + [mn] = [1]$$

Pero, $[ab] = [a] \bullet [b]$ y , por ser mn un múltiplo de n, se tiene que $[mn] = [0]$. En consecuencia, reemplazando en la igualdad anterior, tenemos que

$$[a] \bullet [b] = [1]$$

Esta igualdad nos dice que $[a]$ es invertible y que su inverso es $[b]$.

SUBGRUPOS

DEFINICION Sea $(G, *)$ un grupo. Un subconjunto no vacío H de G es un **subgrupo** de $(G, *)$ si y sólo si $(H, *)$ es un grupo.

EJEMPLO 14 Si $(G, *)$ es un grupo, entonces $H = \{e\}$ y el mismo G son subgrupos de G. Estos subgrupos son llamados **subgrupos triviales** de $(G, *)$.

EJEMPLO 15 $(\mathbb{Z}, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Q}, +)$ y, a su vez, $(\mathbb{Q}, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

EJEMPLO 16 $H = \{ e, a \}$, $K = \{ e, b \}$ y $L = \{ e, c \}$ son subgrupos del grupo de Klein (ejemplo 12).

El siguiente teorema nos da un criterio más simple para reconocer un subgrupo.

TEOREMA 8.7 Sea $(G, *)$ un grupo y $H \subset G$ un subconjunto no vacío. H es un subgrupo de G si y sólo si se cumple que:

1. $a \in H \wedge b \in H \Rightarrow a * b \in H$ (H es cerrado respecto a $*$)

2. $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

Demostración:

($\Rightarrow$)

Como $(H, *)$ es un grupo, $*$ es una operación binaria en H. Esto es $* : H \times H \to H$. Luego, se cumple **1.**

La propiedad **2** sigue inmediatamente de la propiedad G_3 de grupo.

($\Leftarrow$)

Debemos probar que $(H, *)$ cumple con la definición de grupo:

G_1. Asociatividad:

Evidentemente $*$ es asociativa en H, ya que $*$ es asociativa en G y $H \subset G$.

G_2. Elemento neutro:

Sea e el elemento neutro de $(G, *)$. Probaremos que $e \in H$.

Sea $a \in H$. Por 2, $a^{-1} \in H$ y, por 1, $e \in H$, ya que

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

G_3. Elementos inversos:

Si $a \in H$, por 2, $a^{-1} \in H$. Además se cumple que

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

EJEMPLO 17 Si P es el conjunto de números enteros pares, entonces $(P, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

En efecto, probaremos que se cumplen las condiciones 1 y 2 del teorema anterior.

1. $a \in P \wedge b \in P \Rightarrow \exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \;/\; a = 2k_1 \wedge b = 2k_2$

$\Rightarrow \exists\, k_3 = (k_1 + k_2) \in \mathbb{Z} \;/\; a + b = 2k_3$

$\Rightarrow (a + b) \in P$

2. $a \in P \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \;\; / \;\; a = 2k$

$\Rightarrow \exists k_1 = -k \in \mathbb{Z} \;\; / \;\; -a = 2k_1$

$\Rightarrow -a \in P$

HOMOMORFISMO

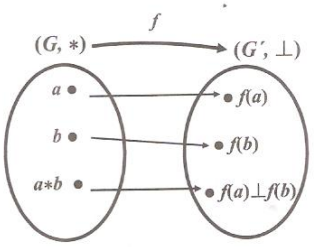
Entre estructuras algebraicas existen ciertas funciones que se distinguen por respetar las operaciones de las estructuras. Estas funciones se les llaman homomorfismos.

DEFINICION Sea $*$ y $\perp$ operaciones binarias en G y G' respectivamente.

Un **homomorfismo de $(G, *)$ en $(G', \perp)$** es una función

$$f: G \to G' \text{ tal que}$$

$$f(a * b) = f(a) \perp f(b), \; \forall a, b \in G$$



En términos simples, un homomorfismo es una función que respeta (preserva) las operaciones.

Un **isomorfismo de $(G, *)$ en $(G', \perp)$** es un **homomorfismo biyectivo**. En este caso, se dice que $(G, *)$ y $(G', \perp)$ son isomorfos. Desde un punto de vista algebraico, no hay distinción entre $(G, *)$ y $(G', \perp)$.

EJEMPLO 18 $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \quad f(n) = \dfrac{n}{2}$

es un homomorfismo de $(\mathbb{Z}, +)$ en $(\mathbb{Q}, +)$.

En efecto:

$$f(n+m) = \frac{n+m}{2} = \frac{n}{2} + \frac{m}{2} = f(n) + f(m).$$

EJEMPLO 19 La función exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \; f(x) = 10^x$

es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, +)$ en $(\mathbb{R}^+, .)$

En efecto,

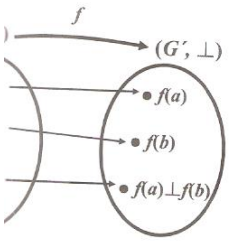
$$f(a+b) = 10^{a+b} = 10^a \,.\, 10^b = f(a) \,.\, f(b)$$

f es biyectiva, ya que tiene por inversa a: $g(x) = \log(x)$.

---

que se distinguen por
nciones se les llaman

respectivamente.



no **biyectivo**. En este
sde un punto de vista

).

10^x

$x) = \log(x)$.

ANILLOS Y CAMPOS

Los anillos y los campos son estructuras algebraicas que tienen dos operaciones interrelacionadas. Los anillos toman como modelo a $\mathbb{Z}$, los números enteros.

DEFINICION Un **anillo** es un conjunto A no vacío provisto de dos operaciones, denotadas por "+" y "." tales que:

A₁. $a + (b + c) = (a + b) + c, \ \forall a, b, c \in A$

A₂. $\exists\, 0 \in A$, **tal que** $a + 0 = 0 + a = a, \ \forall\, a \in A$

A₃. $\forall a \in A, \exists\, -a \in A$ **tal que** $a + (-a) = (-a) + a = 0$

A₄. $a + b = b + a, \ \forall\, a, b \in A$

A₅. $a\,.\,(b.\,c) = (a\,.\,b)\,.\,c, \ \forall a, b, c \in A$

A₆. Leyes Distributivas:

$$a\,.\,(b + c) = ab + ac \ \text{ y } \ (b + c)\,.\,a = b\,.\,a + c\,.\,a, \forall a, b, c \in A$$

El lector debe reconocer que los cuatro primeros axiomas dicen que A con la operación $+$, que llamaremos adición, es **un grupo abeliano**. La propiedad 5 dice que la operación $.$, que llamaremos multiplicación, es asociativa. El axioma 6 interrelaciona las dos operaciones.

A un anillo lo representaremos por la tríada $(A, +, .)$, donde A es el conjunto no vacío, $+$ y $.$ son las dos operaciones binarias.

El anillo A es un **anillo conmutativo**, si la **multiplicación es conmutativa**:

$$a\,.\,b = b\,.\,a, \quad \forall a, b \in A$$

El anillo A **es un anillo con unidad**, si existe un elemento $1 \in A$ que es elemento identidad para la multiplicación. Es decir, se cumple que:

$$1.\,a = a.\,1 = a, \ \forall a \in A$$

En este caso, el elemento **1** es llamado **la unidad del anillo**.

EJEMPLO 20 El conjunto de los números enteros provisto de la adición y la multiplicación usuales; es decir $(\mathbb{Z}, +, .)$, es un anillo conmutativo y con unidad.

EJEMPLO 21 El conjunto P formado por los números entero pares, provisto de la adición y la multiplicación usuales; es decir, $(P, +, .)$ es un anillo conmutativo que no tiene unidad.

EJEMPLO 22 $(\mathbb{Z}_n, +, \bullet)$ es un anillo conmutativo con unidad. En efecto, el teorema 8.5 y la primera parte del teorema 8.6 nos dicen que $(\mathbb{Z}_n, +, \bullet)$ cumple con los cinco primeros axiomas de la definición de anillo, que la multiplicación es conmutativa y que tiene unidad, que es [1]. En cuanto al axioma 6 tenemos:

$$[i] \bullet ([j] + [k]) = [i] \bullet ([j + k]) = [i(j + k)] = [i \,.\, j + i \,.\, k]$$
$$= [i \,.\, j] + [i \,.\, k] = [i] \bullet [j] + [i] \bullet [k]$$

DEFINICION Un **campo** es un anillo $(C, +, .)$ tal que $(C, +)$ y $(C^*, .)$ son **grupos abelianos**.

En términos más precisos, un conjunto C no vacío, provisto de dos operaciones, $+$ y $.$, es decir $(C, +, .)$, es un **campo** si satisface los siguientes axiomas:

C_1. $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in C$

C_2. $\exists\, 0 \in C$, **tal que** $a + 0 = 0 + a = a, \ \forall\, a \in C$

C_3. $\forall a \in C, \exists\, -a \in C$ **tal que** $a + (-a) = (-a) + a = 0$

C_4. $a + b = b + a, \forall a, b \in C$

C_5. $a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c, \ \forall a, b, c \in C$

C_6. $\exists\, 1 \in C$, **tal que** $a \,.\, 1 = 1 \,.\, a = a, \ \forall\, a \in C$

C_7. $\forall a \in C$, **tal que** $a \neq 0, \ \exists\, a^{-1} \in C$ **tal que** $a \,.\, a^{-1} = 1$

C_8. $a \,.\, b = b \,.\, a, \ \forall a, b \in C$

C_9. $a \,.\, (b + c) = ab + ac, \ \forall a, b, c \in C$

EJEMPLO 23 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, con sus operaciones usuales de adición y multiplicación, son los campos más conocidos.

---

entero pares, provisto de
decir, $(P, +, .)$ es un

---

on unidad. En efecto, el
ema 8.6 nos dicen que
imeros axiomas de la
es conmutativa y que
na 6 tenemos:

$+ k)] = [i . j + i . k]$

$[j] + [i] \bullet [k]$

$(C, +)$ y $(C^*, .)$ son

de dos operaciones, +
axiomas:

1

suales de adición y
los.

EJEMPLO 24 $(\mathbb{Z}_p, +, \bullet)$, donde p es un número primo, es un campo. En efecto, esta conclusión sigue inmediatamente de los teoremas 8.5 y 8.6.

ALGEBRA DE BOOLE

En los capítulos 1 y 4 hemos resaltado los idénticos comportamientos que tienen las proposiciones, los conjuntos y los circuitos combinatorios, provistos de sus respectivas operaciones básicas.

Un **álgebra de Boole** es un conjunto no vacío $\mathfrak{B}$ provisto de dos operaciones binarias $\oplus$, $\odot$, que llamaremos **suma** y **producto** respectivamente, y una operación unitaria "$'$", que llamaremos **complemento**, las cuales satisfacen los siguientes axiomas:

B_1. Leyes Conmutativas.

$$a \oplus b = b \oplus a \quad \text{y} \quad a \odot b = b \odot a, \qquad \forall a, b \in \mathfrak{B}$$

B_2. Leyes de Identidad

Existen en $\mathfrak{B}$ dos elementos distintos, 0 y 1, tal que

$$a \oplus 0 = a. \quad \text{y} \quad 1 \odot a = a, \qquad \forall a \in \mathfrak{B}$$

B_3 Leyes Distributivas

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \text{ y } a \oplus (b \odot c) = (a \oplus b) \odot (a \oplus c), \forall a, b, c \in \mathfrak{B}$$

B_4 Leyes de Complementación

$$a \oplus a' = 1 \quad \text{y} \quad a \odot a' = 0, \ \forall a \in \mathfrak{B}$$

A esta álgebra de Boole la representaremos por la cuadrupla $(\mathfrak{B}, \oplus, \odot, ')$.

EJEMPLO 25. Sea U un conjunto. $(\wp(U), \cup, \cap, \complement)$ en un álgebra de Boole.

En este caso, $\mathfrak{B} = \wp(U)$; $\oplus = \cup$, la unión de conjuntos, $\odot = \cap$, la intersección de conjuntos y $' = \complement$, el complemento de un conjunto.

Además, $0 = \varnothing$ y $1 = U$.

El cuadro de álgebra de conjuntos en nuestro capítulo 4 nos dicen que los axiomas del álgebra de Boole son satisfechos.

EJEMPLO 26. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de formado por las proposiciones.

La cuadrupla $(\mathcal{P}, \vee, \wedge, \sim)$ es un álgebra de Boole.

En este caso, $\mathfrak{B} = \mathcal{P}$; $\oplus = \vee$, la disyunción; $\odot = \wedge$, la conjunción; $' = \sim$, la negación.

Además, $0 = \mathbf{0}$, una contradicción; $1 = \mathbf{1}$, una tautología.

El cuadro de álgebra de las proposiciones en nuestro capítulo 1 nos dice que los axiomas de un álgebra de Boole son satisfechos.

PROBLEMAS RESUELTOS 8.2

PROBLEMA 1 Sean $(G, *)$ y $(\overline{G}, \perp)$ dos grupos con elementos neutros e y $\bar{e}$, respectivamente. Si $f: G \to \overline{G}$ es un homomorfismo, probar que

1. $f(e) = \bar{e}$ **2.** $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$, $\forall a \in G$

Solución

1. Sea a un elemento cualquiera de G. Tenemos que

$$f(a) \perp f(e) = f(a * e) = f(a) = f(a) \perp \bar{e}$$

El problema resuelto 2 de la sección anterior nos permite cancelar $f(a)$ de la igualdad anterior para obtener: $f(e) = \bar{e}$.

2. Sea a un elemento cualquiera de G. Tenemos que

$$f(a) \perp f(a^{-1}) = f(a * a^{-1}) = f(e) = \bar{e}$$

$$f(a^{-1}) \perp f(a) = f(a^{-1} * a) = f(e) = \bar{e}$$

Luego, $(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$

PROBLEMA 2 Sea $f: G \to \overline{G}$ un homomorfismo del grupo $(G, *)$ en el grupo $(\overline{G}, \perp)$. Se llama **núcleo de** f al siguiente subconjunto de G.

$$K = \{ x \in G \ / \ f(x) = \bar{e} \}$$

Probar que el núcleo K es un subgrupo de G.

Solución

Probaremos que K satisface las dos condiciones exigidas en el teorema 8.7:

1. Si $a \in K$ y $b \in K$, entonces

posiciones.
ra de Boole.
isyunción; $\odot = \wedge$, la

, una tautología.
n nuestro capítulo 1 nos
son satisfechos.

8.2

mentos neutros e y $\bar{e}$,
omorfismo, probar que
$a))^{-1}$, $\forall a \in G$

ite cancelar $f(a)$ de la

o $(G, *)$ en el grupo
conjunto de G.

eorema 8.7:

$$f(a * b) = f(a) \perp f(b) = \bar{e} \perp \bar{e} = \bar{e}$$

Luego, $(a * b) \in K$

2. Si $a \in K$, entonces, por la parte 2 del problema anterior,

$$f(a^{-1}) = (f(a))^{-1} = (\bar{e})^{-1} = \bar{e}$$

Luego, $a^{-1} \in K$

PROBLEMAS PROPUESTOS 8.2

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos, con la operación indicada tienen la estructura de grupo?

a. $A = \{ n \in \mathbb{Z} \ / \ n < 0 \}$, con la adición de enteros.

b. $B = \{ n \in \mathbb{Z} \ / \ n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \}$, con la adición de enteros.

c. $C = \{ x \in \mathbb{Z} / x = 2k, k \in \mathbb{Z} \}$, con la adición de enteros.

d. $D = \{ n \in \mathbb{Z} \ / \ n = 5k, \ k \in \mathbb{Z} \}$, con la adición de enteros.

e. $E = \{ -1, 1, \}$, con la multiplicación de enteros.

f. $F = \{ 1, -1, i, -i \}$, con la multiplicación de complejos.

g. $G = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1 \}$, con la multiplicación de complejos.

2. Sean r_1, r_2 y r_3 las tres raíces de la ecuación cúbica: $x^3 = 1$.
Probar que el conjunto $A = \{ r_1, r_2, r_3 \}$, multiplicación de complejos, es un grupo abeliano.

3. Sea $A = \mathbb{R} - \{-1\}$. En A definimos la siguiente operación: $a * b = a + b + ab$

a. Probar que $(A, *)$ es un grupo abeliano.

b. En $(A, *)$ resolver la ecuación: $3 * (x * 5) = 4$

4. Si en $\mathbb{R}^n$ definimos la operación

$$(x^1, \ldots, x^n) + (y^1, \ldots, y^n) = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n).$$

Probar que $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo abeliano.

5. En $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{ 0 \}$ definimos la siguiente operación: $a * b = \dfrac{ab}{2}$

Probar que $(\mathbb{Q}^*, *)$ es un grupo abeliano.

6. Sea M el conjunto de números reales: $M = \{ a + b\sqrt{2} \,/\, a, b \in \mathbb{Q} \}$

a. Probar que M, con la adición de números reales es un conjunto abeliano.

b. Si $M^* = M - \{0\}$, probar que M^*, con la multiplicación de números reales, es un grupo abeliano.

7. Si $(G, *)$ es un grupo, probar que el único elemento idempotente de G es e. Esto es, probar que $x * x = x \Rightarrow x = e$

8. Sea $(G, *)$ un grupo. Probar que si $x * x = e, \forall x \in G$, entonces $(G, *)$ es abeliano.

9. Sean $H = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = 0 \}$ y $L = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 0 \wedge z = 0 \}$.
Probar que H y L son subgrupos de $(\mathbb{R}^3, +)$

10. Si A y B son subgrupos de un grupo $(G, *)$.

a. Probar que $A \cap B$ es un subgrupo de $(G, *)$.

b. Probar, con un contraejemplo, que la unión de los subgrupos no siempre es un subgrupo.

11. Sea $\{ A_i \}_{i \in I}$ una familia de subgrupos de un grupo $(G, *)$.
Probar que $\bigcap_{i \in I} A_i$ es un subgrupo de G.

12. Probar que la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^2$ es un homomorfismo de $(\mathbb{R}^*, .)$ en $(\mathbb{R}^*, .)$.

13. Probar que la función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (-y, x)$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R}^2, +)$ en $(\mathbb{R}^2, +)$.

14. Si $f : G \to H$ y $h : H \to L$ son homomorfismos, probar que la composición $h \circ f : G \to L$ es un homomorfismo.

15. Sea $(G, *)$ un grupo y a un elemento fijo de G. Probar que las siguiente función es un isomorfismo: $h : G \to G$, $h(x) = a^{-1} * x * a$

16. Sea $f : G \to \overline{G}$ un homomorfismo de grupos. Si $H \subset G$ es subgrupo de G y $L \subset \overline{G}$ es un subgrupo de $\overline{G}$, probar que

a. $f(H)$ es un subgrupo de $\overline{G}$.

b. $f^{-1}(L)$ es un subgrupo de G.

$z, b \in \mathbb{Q}\}$
in conjunto abeliano.
ación de números reales,

npotente de G es e. Esto

G, entonces $(G, *)$ es

$\mathbb{R}^3 \ / \ y = 0 \ \wedge \ z = 0\}$.

ubgrupos no siempre es

omorfismo de $(\mathbb{R}^*, .)$

es un isomorfismo de

r que la composición

las siguiente función

es subgrupo de G y

RESPUESTAS

CAPITULO 1

SECCION 1.1

1. Todas son proposiciones, excepto f, h, i y l. La p es una proposición falsa.

SECCION 1.2

1. **a.** m **b.** $\sim p$ **c.** $c \to d$, donde $c : x^2 = 4$

d. $(s \wedge d) \to (\sim t)$ **e.** $c \leftrightarrow p$ **f.** $(a \wedge f) \vee (\sim a \wedge p)$

g. $c \to a$ **h.** $v \to p$ **i.** $p \to c$

j. $p \to f$ **k.** $t \to d$ **l.** $\sim(t \wedge s)$

l. $\sim(t \wedge s)$ **m.** $c \wedge (e \to a)$ **n.** $(q \veebar s) \wedge (o \to m)$

o. $c \leftrightarrow (p \vee m)$ **p.** $\sim l \to f$ **q.** $b \wedge f$

r. $\sim[(t \vee i) \wedge (d \wedge p)]$ **s.** $(c \wedge d) \veebar (\sim p \wedge e)$ **t.** $e \to a$

u. $(h \wedge o \wedge \sim n) \to (a \leftrightarrow \sim g)$ **v.** $(b \vee e) \wedge t$ **w.** $d \to p$

x. $p \to e$ **y.** $f \to (c \wedge f)$

2. **a.** **R. :** Si $x = 5$, entonces $x + 2 = 7$. **C. :** Si $x + 2 \neq 7$, entonces $x \neq 5$.

C. R. : Si $x \neq 5$, entonces $x + 2 \neq 7$.

b. **R. :** Si la conjunción no es falsa , entonces el condicional es falso.

C. : Si el condicional no es falso, entonces la conjunción es falsa.

C. R. : Si la conjunción es falsa , entonces el condicional no es falso.

c. **R. :** Una condición necesaria para que $y \neq 2$ es $y + 1 = 5$.

C. : Una condición necesaria para que $y + 1 \neq 5$ es $y = 2$.

C. R. : Una condición necesaria para que $y = 2$ es $y + 1 \neq 5$.

d. **R. :** $x^3 = -8$ es condición suficiente para que $2x + 5 = 1$.

C. : $2x + 5 \neq 1$ es condición suficiente para que $x^3 \neq -8$.

C. R. : $x^3 \neq -8$ es condición suficiente para que $2x + 5 \neq 1$.

e. R. : Si estudio, entonces llego temprano a casa.

C. : Si no llegue temprano a casa, entonces no estudio.

C. R. : Si no estudio, entonces no llego temprano a casa.

f. R. : Yo voy a clases cuando entiendo la materia.

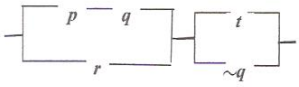
C. : Yo no entiendo la materia cuando no voy a clases.

C. R. : Yo no voy a clases cuando no entiendo la materia

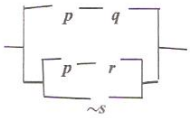
3. a. $x \leq y$ **b.** $x \geq y$ **c.** $x > y$ **d.** $x < y$ **4. a.** 1 **b.** 0 **c.** 1 **d.** 0 **e.** 1

5. a. 1 **b.** 1 **c.** 1 **d.** 1 **e.** 1 **f.** 0 **g.** 1

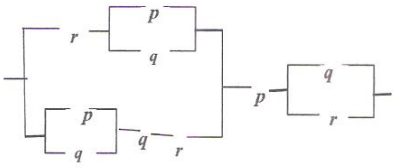
6. a. $[(p \wedge q) \vee r] \wedge (t \vee \sim q)$



b. $(p \wedge q) \vee [(p \wedge r) \vee \sim s)$



c. $[[r \wedge (p \vee q)] \vee [(p \vee q) \wedge (q \wedge r)]] \wedge [p \wedge (q \vee s)]$



7. a. Si París está en Francia y Bolívar nació en Caracas, entonces Cervantes no escribió la Ilíada.

b. No es el caso que si París está en Francia, entonces Bolívar no nació en Caracas; si y sólo si Cervantes escribió la Iliada y Sócrates murió en España.

c. O París no está en Francia o Bolívar nació en Caracas; y si Cervantes escribió la Iliada, entonces Sócrates no murió en España.

d. O Bolívar nació en Caracas y Sócrates no murió en España o si París está en Francia, entonces Cervantes escribió la Ilíada.

e. O París está en Francia y, Bolívar nació en Caracas y Cervantes escribió la Ilíada o Sócrates no murió en España.

f. Si París está en Francia, entonces Bolívar nació en Caracas; y si Cervantes escribió la Ilíada, entonces Sócrates murió en España.

g. Cervantes no escribió la Ilíada o Bolívar nació en Caracas, si y sólo si, París está en Francia y Sócrates no murió en España.

8. a. 1 **b.** 0 **c.** 1 **d.** 1 **e.** 1 **f.** 1 **g.** 1

io.

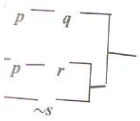
casa.

s.

teria

. 0 **c.** 1 **d.** 0 **e.** 1

$\vee [(p \wedge r) \vee \sim s)$



ntonces Cervantes no

Bolívar no nació en
tes murió en España.

acas; y si Cervantes

aña o si París está en

ervantes escribió la

acas; y si Cervantes

s, si y sólo si, París

9. **a.** $2 \times 2 = 4$ **b.**

p	1	2	3	4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

SECCION 1.3

1. a. $\sim p \wedge \sim\sim(q \rightarrow p)$ **b.** $[p \rightarrow q \wedge r] \rightarrow p \vee \sim\sim q$

2. a. $(\sim p \rightarrow q) \wedge [(r \vee m) \leftrightarrow t]$ **b.** $[\sim p \rightarrow (q \wedge r)] \vee (m \leftrightarrow t)$

c. $[(\sim p \rightarrow q) \wedge r] \vee (m \leftrightarrow t)$ **d.** $\sim[p \rightarrow \{(q \wedge r) \vee (m \leftrightarrow t)\}]$

4. a. $\sim(p \rightarrow s)$ **b.** $\sim c \wedge (m \vee \sim m)$ **c.** $(p \wedge d) \veebar (\sim u \rightarrow b)$

d. $(p \rightarrow \sim c) \wedge (\sim c \rightarrow \sim r)$ **e.** $\sim[c \rightarrow (\sim s \vee \sim b)]$

5. a. 0 **b.** 0 **c.** 1 **d.** 1 **6.** $VL(p) = VL(q) = 1$

7. $VL(m) = 1$, $VL(r) = 0$, $VL(t) = 0$ **8.** $VL(p) = 1$, $VL(q) = 0$, $VL(r) = 1$

9. $VL(p) = 1$, $VL(q) = 0$, $VL(r) = 1$ **10. a.** sí **b.** sí **c.** 9 pm

11. a. no **b.** sí **12. a.** sí **b.** sí

SECCION 1.4

10. $p \wedge q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$, $p \veebar q \equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)$,

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$, $p \leftrightarrow q \equiv \sim[\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)]$

11. $p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$, $p \wedge q \equiv \sim(p \rightarrow \sim q)$, $p \veebar q \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow \sim(q \rightarrow p)$,

$p \leftrightarrow q \equiv \sim[(p \rightarrow q) \rightarrow \sim(q \rightarrow p)]$

12. $p \veebar q \equiv \alpha \downarrow \alpha$, donde

$$\alpha = [(p \downarrow p) \downarrow \{(q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)\}] \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow \{(p \downarrow p) \downarrow (p \downarrow p)\}]$$

13. a. $\sim p \equiv p \mid p$ **b.** $p \vee q \equiv (p \mid p) \mid (q \mid q)$ **c.** $p \wedge q \equiv (p \mid q) \mid (p \mid q)$

d. $p \rightarrow q \equiv [(p \mid p) \mid (p \mid p)] \mid (q \mid q)$ **e.** $p \leftrightarrow q \equiv \alpha \mid \alpha$, donde

$$\alpha = [\{(p \mid p) \mid (p \mid p)\} \mid (q \mid q)] \mid [\{(q \mid q) \mid (q \mid q)\} \mid (p \mid p)]$$

f. $p \veebar q \equiv \alpha \mid \beta$, donde

$$\alpha = [\{p \mid (q \mid q)\} \mid \{p \mid (q \mid q)\}] \mid [\{p \mid (q \mid q)\} \mid \{p \mid (q \mid q)\}]$$

$$\beta = [\{q \mid (p \mid p)\} \mid \{q \mid (p \mid p)\}] \mid [\{q \mid (p \mid p)\} \mid \{q \mid (p \mid p)\}]$$

14. **a.** $\sim p \wedge q$ **b.** $\sim p \wedge q$ **c.** $\sim p$ **d.** $\sim q \vee \sim r$

15. **a.** $\sim p \quad q$ **b.** $p \quad q \quad r$

c. q **d.** $p \quad \sim q$ **e.** $p \quad \sim q \quad r$

f. $q \quad \sim p$ **g.** $\sim p \quad q$ **h.** $\sim q$

i. p

16. $p \quad q \quad \sim p \quad \sim q$ o $p \quad \sim q \quad q \quad \sim p$

17. $p \quad q \quad r$
$p \quad q \quad \sim r$
$P \quad \sim q \quad r$
$\sim p \quad q \quad r$

CAPITULO 3

SECCION 3.1

1. $\{0, 1, 2\}$ **2.** $\{3\}$ **3.** $\{0\}$ **4.** Vacío **5.** Vacío.

6. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ **7.** $\{-2, -1, 0\}$ **8.** $\{-1, 0\}$ **9.** $\{-4, 2, 3\}$ **10.** $\{2, 3, 4\}$

11. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ **12.** $\{(-3, -1), (-3, 0), (-3, 1), (-2, -1), (-2, 0), (-1, -1)\}$

SECCION 3.2

1. **a.** $(\forall x)(H(x) \rightarrow I(x))$ **b.** $(\forall x)(H(x) \rightarrow \sim I(x))$ **c.** $(\exists x)(H(x)) \wedge I(x))$

d. $(\exists x)(H(x) \wedge \sim I(x))$ **e.** $(\forall x)(P(x) \rightarrow C(x))$

f. $\sim(\forall x)(P(x))$ ó $(\exists x)(\sim P(x))$ **g.** $(\forall x)(T(x))$ **h.** $(\forall x)(\sim P(x))$

i. $(\exists x)(B(x))$ **j.** $(\exists x)(E(x) \wedge P(x) \wedge T(x))$ **k.** $\sim(\forall x)(C(x) \rightarrow R(x))$

l. $(\forall x)(I(x) \rightarrow V(x))$ **m.** $\sim(\forall x)(B(x) \rightarrow O(x))$

2. **a.** Algo es perfecto **b.** Algo no es temporal **c.** Nada falta **d.** Todo es correcto.

3. **a.** $(\forall x \in \mathbb{Q})(R(x))$ ó $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$- (V)

b. $(\exists x \in \mathbb{R})(\sim Q(x))$ ó $(\exists x)(R(x) \wedge \sim Q(x))$. (V)

c. $(\forall x)(I(x) \rightarrow \sim Q(x))$. (V)

d. $(\forall x)(P(x) \rightarrow \sim A(x))$. (F): 2 es primo y par

e. $(\exists x \in \mathbb{C})(P(x))$ ó $(\exists x)(C(x) \wedge P(x))$. (V)

f. $(\forall x \in \mathbb{R})(\sim E(x))$. (V)

4. a. $[(\forall x)(B(x))] \rightarrow$ s, donde s: el sol es oro. Contrarrecíproca:

$\sim s \rightarrow (\exists x)(\sim B(x))$, que se lee: Si el sol no es oro, entonces algo no brilla

b. $(\forall x)(R(x)) \rightarrow (\exists x)(R(x))$, donde $R(x)$: x es rojo. Contrarrecíproco:

$(\forall x)(\sim R(x)) \rightarrow (\exists x)(\sim R(x))$, si nada es rojo, entonces algo no es rojo.

5. a. Falsa **b.** Falsa **c.** Verdadera **d.** Falsa, contraejemplo: x = 0

e. Verdadera **f.** Verdadera **g.** Falsa **h.** Verdadera.

6. a. $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(xyz \neq 2)$ **b.** $(\exists x)(\forall y)(P(x, y) \wedge \sim Q(x, y))$.

7. a. $x_0 = 4$ **b.** $x_0 = -1$ ó $x_0 = -2$ **c.** $x_0 = 3$ y $y_0 = 4$ **d.** $x_0 = 3$.

8. a. Todo cuadrado es un rectángulo. (V).

b. Todo polígono, si es rombo y tiene todos sus ángulos internos iguales, entonces es un cuadrado. (V).

c. Existe un polígono que tiene todos sus lados iguales y no es un cuadrado. (V).

d. Todo polígono, es un cuadrado si y sólo si este tiene todos sus ángulos internos y todos sus lados iguales. (F). Un contraejemplo es un pentágono regular.

e. Todo polígono, si tiene todos sus ángulos internos iguales entonces o es un triángulo equilátero o es un cuadrado. (F). Un contraejemplo es un pentágono regular.

f. Todo polígono, si este es un triángulo, entonces todos sus ángulos internos iguales si y sólo si todos sus lados iguales. (V).

11. a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq L \Leftrightarrow (\exists\, \varepsilon > 0)(\forall\, N > 0)(\exists\, x \in D)(x > N \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \neq L \Leftrightarrow (\exists\, \varepsilon > 0)(\forall\, N < 0)(\exists\, x \in D)(x < N \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$.

c. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow (\exists\, M > 0)(\forall\, \delta > 0)(\exists\, x \in D)\ (\,0 < |x-a| < \delta \wedge f(x) \leq M\,)$

d. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow (\exists\, M < 0)(\forall\, \delta > 0)(\exists\, x \in D)(\,0 < |x-a| < \delta \wedge f(x) \geq M\,)$

CAPITULO 4

SECCION 4.1

1. **a.** V **b.** F **c.** F **d.** F **e.** F **f.** V **g.** V
h. V **i.** V **j.** V **k.** F **l.** V **m.** V

2. **a.** $A = \{\,4, 9, 25, 49, 121\,\}$ **b.** $B = \{\,-1, 0, 1\,\}$ **c.** $C = \{\,4, 7, 10, 13, 16, \ldots\,\}$
d. $D = \{\,1, 2, 3, 4, 6, 12, 18\,\}$ **e.** $E = \left\{\,0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$
f. $F = \{\,-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\,\}$ **g.** $G = \phi$ **h.** $H = \{\,-11/4, 1/4, 13/4\,\}$

3. **a.** $A = \{\,x \in \mathbb{N} /\ x = 5n, n \in \mathbb{N}\,\}$ **b.** $B = \{\,x \in \mathbb{N} /\ x = n^2, n \in \mathbb{N},\ 1 \leq n \leq 12\,\}$
c. $C = \{\,x \in \mathbb{N} /\ x = 1 + 4n, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq n \leq 6\,\}$
d. $D = \{\,x \in \mathbb{N} /\ x = n^3, n \in \mathbb{N},\ 1 \leq n \leq 5\,\}$
e. $E = \{\,x \in \mathbb{R} /\ x = (2n+1)\sqrt{3}, n \in \mathbb{N},\ 1 \leq n \leq 4\,\}$

4. Todas son verdaderas excepto g.

5. **a.** $A = B = \{\,2\,\}, C = \{\,3\,\}$ **b.** $A = B = C$, con A cualquiera.
c. $A = \{\,1\,\},\ B = \{\,2\,\}, C = \{\,1, 3\,\}$ **d.** $A = B$, con A cualquiera.
e. $A = \{\,1\,\},\ B = \{\,2\,\}, C = \{\,1, 2\,\}$ **f.** No existe tal A.

6. 9 **7 a.** 2^{3m} **b.** $2^{2^{3m}}$ **c.** $2^{2^{2^{3m}}}$ **8.** 2^{m+1}.

SECCION 4.3

1. **a** $\{\,1, 9\,\}$ **b.** $\{\,2, 5, 7\,\}$ **c.** $\{\,3, 4, 5, 6, 7, 8\,\}$ **d.** B **e.** $\{\,3, 4, 6, 8\,\}$ **f.** $\{\,2, 3\,\}$

2. $A = \{\,0, 5, 7, 8, 9\,\},\quad B = \{\,0, 1, 2, 3, 4, 5, 8\,\}$

3. $A = \{\,0, 3, 4, 8, 9\,\},\quad B = \{\,1, 3, 4, 5, 9\,\}$

4. $A = \{ 0, 2, 3, 5, 6 \}$, $B = \{ 0, 1, 3, 6, 8, 9 \}$, $C = \{ 0, 1, 3, 5, 6, 9 \}$

$U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

14. a. A **b.** $A \cup \complement B$ **c.** $\complement A \cup B$ **d.** U **e.** $\varnothing$ **f.** U

SECCION 4.4

3. $\wp(A \times A) = \{ \varnothing, \{ (\varnothing, \varnothing) \} \}$

SECCION 4.5

1. a. $\{ a, b, x, y, z \}$ **b.** $\{ b, y \}$ **c.** $\{ b, x, y, z \}$ **d.** $\{ b, y \}$

2. a. $\{ 1, 2, ..., 10 \}$ **b.** $\varnothing$ **c.** $\mathbb{N}$ **d.** $\varnothing$ **3. a.** X_2 **b.** X_7 **c.** X_1 **d.** $\{ 1 \}$

4. a. Y_2 **b.** Y_7 **c.** Y_1 **d.** $\{ 1 \}$ **5. a.** B_{20} **b.** B_1 **c.** $\mathbb{R}$ **d.** B_0

6. a. $\mathbb{N}$ **b.** M_{840} **c.** $\mathbb{N}$ **d.** $\{0\}$ **11.** Sólo b y d

12. $\{\{ a \}, \{ b \}, \{ c \}\}$, $\{\{ a \}, \{ b, c \}\}$, $\{\{ b \}, \{ a, c \}\}$, $\{\{ c \}, \{ a, b \}\}$, $\{ X \}$

SECCION 4.6

1. a. i. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) **ii.** (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1) **iii.** (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)
iv. (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1) **v.** (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1) **vi.** (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
b. i. U **vi.** $\{ 2, 7, 8 \}$ **vii.** $\{ 1, 3, 4, 7 \}$ **viii.** $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 \}$

2. (1, 1) diferencia simétrica, (2, 2) diferencia, 3 complemento, (4, 4) intersección, (5, 5) unión.

CAPITULO 5

SECCION 5.2

3. a. $3 \times 2 = 6$ **b.** $2^{8\times4} = 2^{32}$

SECCION 5.3

1. a. 55 **b.** 35 **c.** 15 **2. a.** 5% **b.** 28% **c.** 8% **3. a.** 0 **b.** 7

4 a. 320 **b.** 20 **c.** 60 **d.** 34 **5. a.** 18 **b.** 19 **c.** 114 **d.** 11 **6.** 33

SECCION 5.4

1. $8 \times 6 \times 5 = 240$. **2.** 2^5

3. a. $6^3 = 216$ **b.** $3 \times 5^2 = 75$ **c.** $3 \times 5^2 = 75$ **d.** 150 **e.** 6 **f.** $6 \times 5 \times 4 = 120$

4. a. $4 \times 3 + 2 = 14$ **b.** $14 \times 14 = 196$. **c.** $14 \times 13 = 182$

5. a. $26^3 \times 10^3 = 17.576.000$ **b.** $26 \times 25 \times 24 \times 10^3 = 15.600.000$

c. $26^3 \times 10 \times 9 \times 8 = 12.654.720$ **d.** $26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 = 11.232.000$

6. a. $2^4 = 16$. **b.** $2^6 = 64$. **c.** $3 \times 2^6 = 192$. **d.** 8 **e.** 28. **f.** $2^8 - 1 = 255$. **g.** $2^4 = 16$

7. a. $7! = 5.040$. **b.** $4! \times 3! = 144$. **c.** $5 \times 4! \times 3! = 720$. **d.** $2 \times 3! \times 4! = 288$

8. a. $4 \times 3 \times 3 = 36$ **b.** $4 \times 3 \times 2 = 24$ **c.** $3 \times 2 \times 1 = 6$ **d.** $3 \times 2 \times 3 = 18$

e. $5 \times 4 \times 3 - 3 \times 2 \times 3 = 42$ **f.** $5 \times 4 \times 3 - 3 \times 2 = 54$

g. $3 \times 2 \times 3 + 3 \times 2 \times 1 = 24$ **h.** $4 \times 3 + 4 \times 3 \times 2 = 36$

9. a. 5^3 **b.** $5 \times 4 \times 3 = 60$ **c.** $5^2 = 25$ **d.** $4 \times 3 = 12$ **e.** $4 \times 5^2 = 100$

f. $4 \times 4 \times 3 = 48$ **g.** $5^3 - 4^3 = 161$

10. a. $10!$ **b.** $2! \times 5! \times 3!$ **c.** $3! \times 7!$ **d.** $6 \times 5! \times 3! \times 2!$

e. $(2 \times 8 + 8 \times 7) \times 8!$ **f.** $5 \times 3 + 5 \times 2 + 3 \times 2$

SECCION 5.5

1. a. $n!$ **b.** $n!$ **c.** $\frac{(n+1)!}{2}$ **d.** 1 **e.** n **f.** $\frac{(n+1)n}{2}$

3. a. $P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$ **b.** $C(4,3) = \frac{4!}{(4-3)! \times 3!} = 4$

6 **3. a.** 0 **b.** 7

4 **d.** 11 **6.** 33

6 **f.** $6 \times 5 \times 4 = 120$

000

$9 \times 8 = 11.232.000$

$= 255$. **g.** $2^4 = 16$

$\times 3! \times 4! = 288$

$\times 2 \times 3 = 18$

$. 4 \times 5^2 = 100$

$3! \times 2!$

2

f. $\dfrac{(n+1)n}{2}$

4. $P(7, 3) = 210$ **5.** $C(7, 3) = 35$ **6. a.** $C(10, 5) = 252$ **b.** $C(8, 3) = 56$

7. $C(5, 2) = 10$ **8.** $C(5, 1) + C(5, 2) + C(5, 3) + C(5, 4) + C(5, 5) = 31$

9. $C(8, 3) = 56$ **10.** $C(6, 1) = 6$

11. a. $C(6, 3) \times C(7, 4) = 700$ **b.** $C(6, 4) = 15$ **c.** $C(13, 4) - C(6, 4) = 700$

d. $C(7, 4) + C(7, 3) \times C(6, 1) = 245$

e. $C(6, 1) \times C(7, 3) + C(6, 2) \times C(7, 2) + C(6, 3) \times C(7, 1) = 665$

f. $C(13, 4) - C(11, 2) = 660$

12. a. $52!$ **b.** $C(13, 5) = 1.287$ **c.** $4 \times C(13, 5) = 5.148$

d. $13 \times C(4, 3) \times 12 \times C(4, 2) = 2.496$

e. $13 \times C(4, 2) \times 12 \times C(4, 2) \times 11 \times C(4, 1) = 247.104$

13. a. $C(8, 5) = 56$ **b.** $C(7, 5) = 21$ **c.** $C(8, 2) \times C(7, 3) = 980$

d. $C(8, 3) \times C(7, 2) = 1.176$

14. a. $2^6 = 64$ **b.** $C(6, 1) = 6$ **c.** $C(6,2) = 15$

d. $C(6, 0) + C(6,1) + C(6, 2) + C(6,3) = 42$ **e.** $C(6, 3) = 20$

15. a. $C(15, 2) = 105$ **b.** $C(13, 2) = 78$ **c.** $C(13, 1) \times C(2, 1) = 26$

d. $C(13, 1) \times C(2, 1) + C(2, 2) = 27$ ó $C15, 2) - C(13, 2) = 27$

16. a. $5! = 120$ **b.** $2 \times 4! = 48$ **c.** $4! + 3 \times 3! + 3 \times 2 \times 2! + 3! \times 1 = 60$

17. a. $\dfrac{6!}{2! \times 1! \times 1! \times 1!} = 360$ **b.** $\dfrac{7!}{3! \times 2! \times 1! \times 1!} = 420$ **c.** $\dfrac{11!}{5! \times 3! \times 1! \times 1! \times 1!} = 55.440$

18. a. $C(6, 1) \times 5 \times 21^5 = 122.523.030$ **b.** $C(6, 2) \times 5^2 \times 21^4 = 72.930.375$

c. $21^6 + C(6, 1) \times 5 \times 21^5 = 208.289.151$ **d.** $26^6 - 21^6 = 223.149.655$

e. $26^6 - (21^6 + C(6, 1) \times 5 \times 21^5) = 100.626.625$

19. a. $7!$ **b.** $6!$ **c.** $2 \times 5!$ **20. a.** $10!$ **b.** $2 \times 5! \times 5!$ **c.** $5! \times 4!$

21. a. $9!$ **b.** $4! \times 5!$ **c.** $7! \times 8!$

CAPITULO 6

SECCION 6.2

1. a. $\text{dom}(R) = \{ 3, 5, 7 \}$ **b.** $\text{rang(R)} = \{ 1, 3, 11 \}$ **c.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d. $R^{-1} = \{ (1, 3), (1, 5), (1, 7), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (11, 3) \}$.

2. a. $S \circ R = \{ (0, 3), (0, 7), (1, -4), (-1, -4), (2, 3), (2, 7) \}$

b. $(R^{-1} \circ S^{-1}) = \{ (3, 0), (7, 0), (-4, 1), (-4, -1), (3, 2), (7, 2) \}$

3. $2^4 = 16$

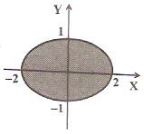
4. a. $S \circ R = \{ (n, 6n) \ / \ n \in \mathbb{N}^* \}$ **b.** $R^{-1} \circ S^{-1} = \{ (6n, n) \ / \ n \in \mathbb{N}^* \}$

5. a.

$\text{dom}(R) = \mathbb{R}$

$\text{rang}(R) = [0, +\infty)$

b.



$\text{dom}(S) = [-2, 2]$

$\text{rang}(S) = [-1, 1]$

6. a. $2^3 = 8$ relaciones.

SECCION 6.3

1. a. Reflexivas: R_5, R_8 **b.** Simétricas: $R_1, R_3, R_5, R_6, R_7, R_8$

c. Antisimétricas: R_2, R_9 **d.** Transitivas: R_2, R_4, R_5, R_8, R_9

2. a. Reflexiva: R_2. **b.** Simétricas: R_1, R_2, R_3

c. Antisimétricas: R_1, R_3, R_4 **d.** Transitivas: R_1, R_2, R_3

3. a. Reflexiva: R_2 **b.** Simétricas: R_1, R_2, R_3 **c.** Antisimétricas: R_2, R_4

4. a. Reflexiva: R_1 **b.** Simétricas: R_1, R_2, R_4 **c.** Antisimétrica: R_3

d. Transitivas: R_1, R_3

5. a. $R \cup S = \{ (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (4, 4), (4, 6), (6, 6) \}$

b. $R \cap S = \{ (2, 4), (2, 6), (3, 6) \}$ **c.** $\text{R} - \text{S} = \{ (2, 3), (3, 4), (4, 6) \}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

) }.

}

, 2) }

{(6n, n) / n ∈ ℕ* }

dom(S) = [−2, 2]

rang(S) = [−1, 1]

R_7, R_8

, R_9

tisimétricas: R_2, R_4

tisimétrica: R_3

(4, 4), (4, 6), (6, 6) }

3, 4), (4, 6) }

6. a. { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2) }

b. { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3) }

c. { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (1, 3), (3, 1), (2, 1) } **d.** { (1, 1) }

e. { (1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1) } **f.** { (1, 2) } **g.** I_X

SECCION 6.4

1. b. $\{ C_r \}_{r \in I}$ donde $I = \{ r \in \mathbb{R} / r \geq 0 \}$ y C_r circunferencia de radio r y centro en el origen.

2. b. $\{ L_b \}_{b \in \mathbb{R}}$, donde L_b es la recta $y = x + b$. O sea, $\{ L_b \}_{b \in \mathbb{R}}$, es el conjunto de rectas de pendientes 1.

3. b. $\{ L_b \}_{b \in \mathbb{R}}$, donde L_b es la recta $y = -x + b$. O sea, $\{ L_b \}_{b \in \mathbb{R}}$ es el conjunto de rectas de pendiente −1.

4. b. $\{ [x] / x \in \mathbb{R} \}$, donde $[x] = \{ x + k / k \in \mathbb{Z} \}$

5. $[0] = \{ 5k / k \in \mathbb{Z} \}$, $[1] = \{ 5k + 1 / \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \}$, $[2] = \{ 5k + 2 / \mathrm{k} \in \mathbb{Z} \}$, $[3] = \{ 5k + 3 / k \in \mathbb{Z} \}$, $[4] = \{ 5k + 4 / \mathrm{k} \in \mathbb{Z} \}$.

6. c. $\sim$ es $\wp(X) \times \wp(X)$. **d.** $\sim$ es la diagonal de $\wp(X)$.

7. $[0] = \{ 0 \}$, $[1] = \{1, 6\}$, $[2] = \{2, 5\}$, $[3] = \{3, 4\}$.

8. b. La recta en el espacio que pasa por el punto (a, b, c) y el origen, menos el punto (0, 0, 0).

9. $R = \{ (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1) \}$. **10.** I_X y $X \times X$.

11. Ver el problema resuelto 1. **18.** $X = \varnothing$.

CAPITULO 7

SECCION 7.1

1. Sólo son funciones T y H **2. a.** Inyectivas: g y k **b.** Sobreyectivas: f, h y k **c.** Biyectiva: k. **3.** Sí, en el caso de que su dominio sea un conjunto unitario.

4. Sí, en el caso de que el conjunto de llegada sea unitario.

8. b. $g(x) = f(x)$, si $x \neq 3$ y $g(3) = 0$.

SECCION 7.2

1. a. $f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{10}$ **b.** $g^{-1}(x) = 2\sqrt[3]{x+1}$ **c.** $h^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } x \geq 16 \\ \frac{2}{5}x - \frac{12}{5}, & \text{si } x < 16 \end{cases}$

d. $f^{-1}(x) = \frac{y+3}{4x-2}$ **2.** $h^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$ **3. a.** $(g \circ f)(x) = \frac{(3x-2)^3}{27} + 2$

b. $(f \circ g)(x) = \frac{x^3}{9} + 4$ **c.** $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{x^3}{81} + \frac{4}{3}$

d. $(g^{-1} \circ f)(x) = 3\sqrt[3]{3x-4}$ **4.** 1.

SECCION 7.3

1. a. $[1, 10]$ **b.** $[-3, 3]$ **c.** $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ **d.** $[1, 6]$.

2. a. $[-3, 15]$ **b.** $[-3, 3]$ **c.** $[-2, -1] \cup [1, 2]$ **d.** $[-1, 5]$

3. a. $(-2, -4/3)$ **b.** $(-3, -1)$ **c.** $(-\infty, -1/2) \cup (1/4, +\infty)$ **d.** $(-3, -1) \cup (-1, 3)$

4. b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2, A = \{-2\}, B = \{2\}$.

SECCION 7.4

1. $a_n = a_{n-1} + 2$ **2.** $b_n = b_{n-1} + 2$ **3.** $c_n = 7c_{n-1}$

4. $d_n = d_{n-1} + 2n - 1$ **5.** $c_n = c_{n-1} + 2n$ **6.** $a_n = a_{n-1} + 2(-1)^n + 1$

7. $a_n = 4(1{,}5)^{n-1}$ **8.** $b_n = 3 \times 5^{n-1} - 1$ **9.** $d_n = \frac{n(n+1)}{2} + 3$

10. $c_n = 9(-1{,}5)^{n-1}$ **11.** $a_n = 8n!$ **12.** $c_n = 2^n + n - 1$

13. $g_n = -2(n-1)$ **14.** Sí, grado 1 **15.** No

16. No **17.** No **18.** Sí, grado 3

$= \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } x \geq 16 \\ \frac{2}{5}x - \frac{12}{5}, & \text{si } x < 16 \end{cases}$

$\circ f)(x) = \frac{(3x-2)^3}{27} + 2$

d. $[1, 6]$.

d. $[-1, 5]$

$(-3, -1) \cup (-1, 3)$

$7c_{n-1}$

$a_{n-1} + 2(-1)^n + 1$

$\frac{n(n+1)}{2} + 3$

$)^n + n - 1$

rado 3

19. No **20.** Sí, grado 3 **21.** No

22. $b_n = \frac{1}{3}[5^n + 2(-1)^n]$ **23.** $a_n = (-2)^n$ **24.** $c_n = -5(-3)^n + 2n(-3)^n$

25. $a_n = -6(-2)^n + 4n(-2)^n$ **26.** $b_n = 2(\sqrt{2})^n + (-\sqrt{2})^n$

27. $c_n = \frac{1}{9}[2^n + (-1)^n]^2$ **28.** $c_n = \frac{1}{5}[3^n + 4(2)^{-n}]^2$

29. $a_n = a_0 r^n + h\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$ **30. a.** $C_n = 1{,}12C_{n-1}$ **b.** $C_n = 10.000(1{,}12)^n$

31. a. $b_n = 3b_{n-1}$ **b.** $b_n = 100(3)^n$

32. a. $P_n = 1{,}013P_{n-1}$ **b.** $P_n = 6.000(1{,}013)^n$ millones

c. $P_{50} = 6.000(1{,}013)^{50}$ millones $\approx 11.445{,}203$ millones

CAPITULO 8

SECCION 8.1

1. Asociativas: sólo h. Conmutativas: b, d, e, h. Tienen elemento neutro: e, con $e =$ 0 y f, con $e = 1$.

2. Asociativas: a, b, c, e. Conmutativas: a, c, e. Tienen elemento neutro: c.

3. a.

*	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

b.

$\perp$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

a. Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0, todo elemento es simetrizable.

b. Asociativa conmutativa, con elemento neutro 1, todo elemento simetrizable excepto 0.

4. Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 12, sólo 12 es simetrizable.

10. a. 1 **b.** 2^4 **c.** 3^9 **d.** n^{n^2}. **11. a.** 1 **b.** 2^3 **c.** 3^6.

SECCION 8.2

1. c, d, e, f y g.

3. b. $x = -\frac{19}{24}$

INDICE ALFABETICO

A

Abel Niels H., 234, 272
Aleph subcero, 166
Algebra de Boole, 120, 289, 293
Algebra de Conjuntos,120, 293
Algebra de Proposiciones, 31
Anillo, 291
Anillo con unidad, 291
Antecedente, 9
Aristóteles, 2
Axioma de Especificación, 104, 152
Axioma de Extensión, 152
Axioma de Inducción, 156
Axioma del Infinito, 152
Axioma del Par, 152
Axioma de las Potencias, 152
Axiomas de Peano, 155

B

Barra de Sheffer, 40
Bellard, Fabrice, 44
Bernays, Paul, 151
Bernoulli, Johann, 236
Bicondicional, 12
Binegación, 38
Bit, 13
Boole, Geoge, 44, 98
Bourbaki, Nicolás, 154
Burali-Forti, 151
Byte, 176

C

Campo, 292
Cálculo proposicional, 5
Cantor, Georg, 102, 150
Cardinales transfinitos, 166
Cartán, Henri, 154
Cauchy, Agustín, 194
Circuito combinatorio, 13
Circuito lógico, 13
Circuito secuencial, 13
Clairaut, Alexis, 236
Clase de equivalencia, 218
Cohen, Paul, 166, 167
Combinación, 186
Complemento, 118
Composición de funciones, 248
Composición de Relaciones, 204
Compuerta lógica, 13
Compuerta-NO, 14
Compuerta-O, 15
Compuerta-Y, 15
Condicional, 9
Condicionales asociados, 11
Condiciones iniciales, 263
Condición necesaria, 10
Condición suficiente, 10
Conectiva principal, 21
Conectivo lógico, 5
Conexión en paralelo, 15,
Conexión en serie, 14
Conjunción, 7
Conjunto cociente, 220
Conjunto de índices, 136
Conjunto finito, 165
Conjunto infinito, 165
Conjunto potencia, 107
Conjunto universal, 103
Conjunto vacío, 104
Conjuntos disjuntos, 114
Conmutador, 13
Consecuente, 9
Construcción de los enteros, 220
Construcción de los racionales, 222
Contradicción, 24
Cuantificadores, 79
Cuantificador existencial, 81
Cuantificador exist. de unicidad, 83
Cuantificador universal, 80
Contrario, 11

Contrarrecíproco, 11
Cortaduras de Dedeking, 195

CH

Chevalley, Claude, 154
Chudnorsky, hemanos, 43

D

Dedeking, Leopold, 150, 194
De Morgan, Augustus, 98
Descartes, René, 132
Diagramas de Hasse 229
Diagramas de Venn, 103
Diferencia de conjuntos, 117
Diferencia simétrica, 119
Dilema constructivo, 57
Dilema destructivo, 63
Dirichlet, Peter, 236
Disyunción, 7
Disyunción exclusiva, 8
Diudonné, Jean, 154
Dominio de una relación, 201
Dominio de verdad, 78

E

Ehresman, C., 154
Eilenberg, Samuel, 154
Elementos, 95, 194
Elemento identidad, 276
Elemento invertible, 277
Eléments de Mathematique, 154
Equipotente, 164, 249
Equivalencia Lógica, 30
Escuela Pitagórica, 194
Estructura algebraica, 282, 283
Euler, Leonardo, 86

F

Falacia, 50
Familia indizada, 136
Fermat, Pierre de, 86
Fibonacci, 261
Formas proposicionales, 21
Fourier, Jean, 236
Fraenkel, Adolf, 151
Fregel, G., 99
Función, 237
Función biyectiva, 242
Función característica, 239
Función compuesta, 248
Función identidad, 238
Función inclusión, 238
Función invertible, 246
Función inyectiva, 240
Función sobreyectiva, 241
Funciones proposicionales, 77

G

Galois, Evariste, 272
Gödel, Kurl, 151
Grove, Andrew, 13
Grupo, 284
Grupo Abeliano, 285
Grupo de Klein, 286
Grupo de los enteros móldulo *n*, 287

H

Hasse, Helmut, 230
Hilbert, David, 96, 99
Hipaso de Metaponto, 73, 194
Hipótesis del Continuo, 166
Homomorfismo, 290

I

Igualdad de funciones, 239
Imagen de un conjunto, 254
Imagen de una relación, 201
Imagen inversa, 254
Implicación lógica, 47
Inferencia lógica, 48
Interructores complementarios, 14

les, 21

2
, 239
48
3
3
5
1
241
ales, 77

ıldulo *n*, 287

, 194
166

19
54
01

ırios, 14

Intersección de conjuntos, 113, 138
Inversor, 14
Isomorfismo, 290

K

Kant, Enmanuel, 98
Klein, Felix, 287
Kronecker, Leopold, 150, 195
Kondo Shigeru, 44

L

Ley de contradicción, 31
Ley de demostración por casos, 32
Ley de exportación, 34
Ley de la adición, 51
Ley de la conjunción, 51
Ley de la disyunción exclusiva, 32
Ley de reducción al absurdo, 32
Ley del bicondicional, 32
Ley del condicional, 32
Ley del contrarrecíproco, 32
Ley del tercio excluído, 25
Ley de simplificación, 51
Leyes del álgebra de conjuntos,121
Leyes del álgebra de proposiciones,31
Leyes de la absorción, 32
Leyes asociativas, 31,121
Leyes complementarias, 31,32
Leyes conmutativas, 31, 121
Leyes de De Morgan, 31,121
Leyes de dominación, 31,121
Leyes de identidad, 31,121
Leyes distributivas, 31,121
Leyes idempotentes, 31, 121
Lie, Sophus, 234
Lógica, 3
Lógica difusa, 100
Lukasiewicz, Jan, 100

M

Matriz de una relación, 203
Matriz simétrica, 212
Medalla Fields, 234
Método axiomático, 95
Método del contrarrecíproco, 65
Método de reducción al absurdo, 66
Modus Ponendo Ponens, 51
Modus Tollendo Tollens, 51

N

Negación, 6
Núcleo, 294
Número cardinal, 164
Nobel, Llfred, 233

O

Operación asociativa, 275
Operación binaria, 273
Operación conmutativa, 275
Operación externa, 280
Operación interna, 280
Operación unitaria, 280
Operaciones con vectores binarios,147
Operaciones generalizadas, 136
Operaciones ternarias, 280
Operaciones veritativas, 5
Orden parcial, 230
Orden total, 225
Organón, 98

P

Par ordenado, 130
Paradoja de Russell, 109
Partición, 140
Peano, Giuseppe, 154
Permutación, 183
Pierce, Charles, 99, 198
Pitágoras, 73, 194

Polinomio, 240
Post, Emil, 99
Premio Abel, 234
Premio Nobel, 233
Principia Matemática, 74, 154
Principios básicos de conteo, 175
Principio de buena ordenación, 162
Principio de Inclusión-Exclusión, 168
Principio de Inducción Matemát., 156
Producto cartesiano, 131
Programa de Erlanger, 286
Proposición, 3
Proposición compuesta, 5
Proposición simple, 5
Prueba deductiva, 33
Prueba por casos, 54
Prueba por contraejemplo, 84
Prueba por inducción, 156

R

Rango de una relación, 201
Razonamiento válido, 48
Recíproco, 11
Regla de inferencia, 51
Regla de la suma, 178
Regla del producto, 176
Reglas de negación de cuantif., 83
Relación antisimétrica, 210
Relación de congruencia mód. *n*, 217
Relación de equivalencia, 216
Relación de orden, 227
Relación de recurrencia, 262
Relación diagonal, 201
Relación inversa, 203
Relación reflexiva, 210
Relación simétrica, 210
Relación transitiva, 210
Relaciones binarias, 200
Relaciones homogéneas lineales, 265
Representación cartesiana, 202
Representación matricial, 202
Representación sagitaria, 203
Russell, Bertrand, 76, 99

S

Schroeder, Ernest, 99
Semigrupo, 284
Signos de agrupación, 21
Silogismo hipotético, 51
Silogismo disyuntivo, 51
Sistema axiomático, 97
Sistema algebraico, 283
SKolen, T. A., 151
Subconjunto, 105
Subconjunto propio, 107
Subgrupo, 288
Sucesor, 155
Sucesiones, 259
Sucesión de Fibonacci, 261

T

Tales de Mileto, 194
Tautología, 24
Teorema de Cantor, 167
Teoría de las Proporciones, 194
Tercio excluido, 25
Términos definidos, 96
Términos primitivos, 96
Transistor, 13
Tríadas ordenadas, 141

U

Unión de conjuntos 113, 138

V

Valor de conducción, 14
Valor lógico, 3
Vectores binarios, 147
Venn, John, 104

l, Bertrand, 76, 99

S

der, Ernest, 99
upo, 284
de agrupación, 21
no hipotético, 51
no disyuntivo, 51
axiomático, 97
algebraico, 283
, T. A., 151
junto, 105
junto propio, 107
o, 288
, 155
nes, 259
de Fibonacci, 261

T

Mileto, 194
ía, 24
de Cantor, 167
las Proporciones, 194
cluido, 25
definidos, 96
primitivos, 96
, 13
rdenadas, 141

U

conjuntos 113, 138

V

onducción, 14
o, 3
inarios, 147
, 104

Viète, F, 43
Von Neumann, John, 151

W

Weierstrass, Carl, 195
Whitehead, Alfred, 76, 99
Wiles, Andrew, 86

Z

Zadeh, Lotfi, 100
Zermelo, Ernest, 151
ZachArias Dase, J. M, 43

en